ELEMENTS DE CALCUL INFINITESIMAL PAR M. DUHAMEL: 1

L'Auteur et l'**Éditeur** de cet ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes les langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Decrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage (tome Ier), a été fait à Paris dans le cours du mois de février 1856, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

643580

ÉLÉMENTS

NAPOLI

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. DUHAMEL,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

TOME PREMIER.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1856

(L'Auteur et l'Éditeur de cet ouvrage se réservent le droit de traduction)

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE..... XIII

LIVRE I.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES.

CHAPITRE Ier.

Pages

Des nombres en général..... 1

CHAPITRE II.

Premiers principes de la théorie des limites..... 7
Limite d'une variable..... 9
Infiniment petits..... 9
Principe fondamental des limites..... 9
Limites des sommes, produits, quotients ou puissances quelconques de variables..... 10
Méthode des limites..... 13
Application aux cas simples que présente la géométrie élémentaire..... 15

CHAPITRE III.

Réflexions au sujet de quelques définitions..... 18
De l'infini..... 18
Des nombres incommensurables..... 20
De l'équivalence..... 22

CHAPITRE IV.

Des différentes manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites de variables..... 25

CHAPITRE V.

Des grandeurs considérées comme limites de séries..... 28

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Pages.

Des grandeurs considérées comme limites de sommes d'infiniment petits. 35
Théorème fondamental. 35
Divers ordres d'infiniment petits 38

CHAPITRE VII.

Comment les aires des courbes planes peuvent être considérées comme limites de sommes d'infiniment petits. . 41
Sommes de parallélogrammes infiniment petits. 41
Sommes de trapèzes infiniment petits. 43
Sommes de secteurs infiniment petits 43

CHAPITRE VIII.

Application des principes précédents à quelques exemples. 46

CHAPITRE IX.

Comment les volumes des corps peuvent être considérés comme limites de sommes d'infiniment petits. 61
Solides de révolution. 61
Solides terminés par des surfaces quelconques. 63

CHAPITRE X.

Application à la mesure de quelques volumes. 66

CHAPITRE XI.

Applications mécaniques. Détermination des centres de gravité. 75

CHAPITRE XII.

Des quantités considérées comme limites de rapports d'infiniment petits. 85
Tangentes aux courbes rapportées à divers systèmes de coordonnées. 85
Coordonnées rectilignes. 85
Coordonnées polaires. 87
Troisième système de coordonnées. 88

Pages.
Autre système de coordonnées 90
Coordonnées angulaires..... 92
De l'existence des tangentes en général..... 93
Théorème général..... 94
Dérivées des fonctions..... 97
Du problème réciproque..... 103

CHAPITRE XIII.

Application des méthodes précédentes à quelques exemples..... 106
Exemples de la détermination des points d'une courbe par ses tangentes..... 117

CHAPITRE XIV.

De la longueur des lignes courbes et de l'aire des surfaces courbes..... 125

CHAPITRE XV.

Applications mécaniques des limites des rapports d'infiniment petits..... 137

CHAPITRE XVI.

Remarques et théorèmes propres à faciliter l'emploi des infiniment petits..... 143

CHAPITRE XVII.

Courbure des arcs de courbes planes quelconques et diverses propositions qui s'y rapportent..... 153
Exemples de la détermination des centres de courbure.. 169

CHAPITRE XVIII.

Développées des courbes planes..... 174

CHAPITRE XIX.

Déplacement d'une figure sur un plan. Problème de la roulette. Méthode de Descartes pour mener les tan-

Pages.

gentes aux courbes auxquelles il conduit. Généralisation de cette question. Centre instantané de rotation. 179
Expression du rayon de courbure de la courbe décrite par un point lié à la courbe roulante..... 182
Application aux épicycloïdes. Leur double génération... 185
Comment tout déplacement continu se ramène au roulement d'une courbe sur une autre..... 190
Moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un point quelconque du système, quand on connaît les tangentes aux trajectoires de deux points particuliers 193

CHAPITRE XX.

Des courbes enveloppes..... 198
Caustiques..... 203
De l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre..... 208
Rayon de courbure de cette enveloppe..... 210
Mesure du glissement de la courbe mobile sur son enveloppe..... 213

CHAPITRE XXI.

Cercle osculateur..... 215
Résumé du livre Ier..... 218

LIVRE II.

CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS. CALCUL INVERSE OU INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE Ier.

Des fonctions en général et de la continuité. Généralisation de la méthode des limites..... 221

CHAPITRE II.

Des dérivées, des différences et des différentielles des fonctions d'une seule variable. Notations 227

Digitized by Google

Pages.

Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées..... 230
Différentiation des fonctions de fonctions..... 232
Différentiation des fonctions inverses..... 233
Différentiation des fonctions composées..... 236
Théorème des fonctions homogènes..... 237
Différentielle d'une somme, d'un produit ou d'un quotient. 238
Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples..... 239
Différentiation des fonctions simples..... 240
Différentiation des fonctions implicites..... 249
Expression du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable..... 251
Différentielles et différences d'un ordre quelconque de fonctions d'une seule variable..... 258

CHAPITRE III.

Différentielles, dérivées et différences partielles des divers ordres, des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Différences et différentielles totales..... 263
De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations... 266
Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes..... 268
Différentielles totales des divers ordres des fonctions de variables dépendantes..... 272
Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.. 273

CHAPITRE IV.

Changement de variables..... 276
Cas d'une seule variable indépendante..... 276
Cas de plusieurs variables indépendantes..... 280

CHAPITRE V.

Applications analytiques du calcul différentiel..... 286
Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous des formes singulières..... 286

Pages.

Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable... 293
Extension de cette formule aux fonctions de plusieurs variables..... 307
Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable. 311
Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables..... 316

CHAPITRE VI.

Applications géométriques du calcul différentiel..... 324
Formules différentielles relatives aux tangentes normales et aux courbes planes..... 324

CHAPITRE VII.

Théorie des asymptotes..... 332
Des asymptotes considérées comme limites des tangentes. 338

CHAPITRE VIII.

Différentielles et dérivées de l'arc, de l'aire et de l'inclinaison d'une courbe plane. Usage des dérivées pour reconnaître la concavité ou la convexité..... 348.

CHAPITRE IX.

Points singuliers..... 352

CHAPITRE X.

Expression différentielle du rayon de courbure. Courbes osculatrices en général. Contacts de divers ordres.... 357

CHAPITRE XI.

Théorie analytique des développées. Courbes enveloppes. 366

CHAPITRE XII.

Tangentes et plans normaux aux courbes à double courbure. Plans tangents et normales aux surfaces courbes. 377
Sur la distance des droites successives d'un système continu..... 383

CHAPITRE XIII.

Plan osculateur d'une courbe. Cercle osculateur. Angle

Digitized by Google

Pages

de contingence. Angle de torsion. Surface polaire. Centre de la sphère osculatrice. Contacts des courbes à double courbure. Développées de ces courbes. Contacts des surfaces. 388

LIVRE III.

DES LIMITES DE SOMMES. CALCUL INVERSE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE Ier.

Comment le problème des limites de sommes se ramène au problème inverse de celui du calcul différentiel. . . . 417

CHAPITRE II.

Des diverses méthodes d'intégration. 424

CHAPITRE III.

Intégration des fonctions rationnelles. 430

CHAPITRE IV.

Intégration des fonctions algébriques irrationnelles. 442

CHAPITRE V.

Différentielles binômes. 448

CHAPITRE VI.

Intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires. 457

CHAPITRE VII.

Intégration par séries. 468
Application aux développements des fonctions. 472

CHAPITRE VIII.

Passage des intégrales indéfinies aux intégrales définies. . . 475

CHAPITRE IX.

Autres procédés pour la détermination d'intégrales définies. 491

Digitized by Google

Pages.

CHAPITRE X.

Intégration des differentielles qui renferment plusieurs variables independantes..... 497

CHAPITRE XI.

Separation des variables..... 501

CHAPITRE XII.

Application géométrique des méthodes d'intégration. Quadrature des surfaces planes. Rectification des courbes. 503

CHAPITRE XIII.

Cubature des solides, et quadrature des surfaces courbes. 517
Cubature des solides de révolution..... 517
Quadrature des surfaces de révolution..... 520
Volume des corps terminés par des surfaces quelconques. 524
Quadrature des surfaces courbes quelconques..... 530

CHAPITRE XIV.

Exemples de la détermination des courbes d'après une propriété de leurs tangentes..... 533

NOTE I.

Règles sur la convergence des séries..... 540

NOTE II.

Sur les expressions imaginaires. Comment on les introduit dans les données du calcul..... 569

Planches I, II, III, IV, V, VI.

Digitized by Google

PRÉFACE.

La marche suivie dans la première partie de cet ouvrage est fort différente de celle qu'ont adoptée les divers auteurs qui ont écrit sur le même sujet. Elle ne se rapporte précisément à aucun enseignement existant, mais à l'enseignement tel que je crois qu'il doit être.

L'ordre suivant lequel les diverses parties d'une science doivent être présentées, du moins quant à ce qu'elles ont de général et de caractéristique, est presque toujours l'ordre même suivant lequel elles ont été découvertes. Les conceptions importantes ne sont point dues au hasard; elles se présentent aux hommes éminents de chaque époque lorsqu'elles sont naturellement amenées par les besoins et l'état de la science; et il est convenable de leur donner dans l'enseignement de cette science la place qu'elles ont occupée dans son développement naturel.

La notion des infiniment petits remonte à Archimède; elle s'est présentée d'elle-même dans la mesure des grandeurs géométriques, aussitôt qu'on a voulu considérer les aires de courbes différentes du cercle, ou les volumes de corps terminés par des surfaces courbes autres que celles du cylindre, du cône et de la sphère. Déjà pour la comparaison des volumes de ces derniers corps, ainsi que pour la mesure du cercle, on avait été amené à la conception

fondamentale des limites. Ainsi les deux idées générales les plus fécondes des sciences mathématiques, remontent presque jusqu'à leur berceau, et doivent, par conséquent, se présenter presque au début de leur enseignement.

L'objet principal de cet ouvrage est le développement de ces deux conceptions, qui sont intimement liées l'une à l'autre. Les questions que nous y traitons font partie de diverses branches des mathématiques pures ou appliquées, et se trouveraient autrement disposées dans un enseignement complet de toutes ces branches. Ce sont des extraits que nous en faisons, pour faire comprendre l'esprit des méthodes que nous voulons exposer; mais nous croyons que ces méthodes doivent être introduites dans chaque branche particulière, à mesure que le besoin s'en fait sentir. Nous espérons même le faire un jour si le temps nous permet de réaliser le projet, conçu depuis bien des années, d'esquisser des éléments de mathématiques pures et appliquées. En attendant, nous avons constamment cherché à répandre par notre enseignement, toutes les améliorations que nous avons cru pouvoir apporter aux idées générales et aux méthodes scientifiques; et nous avons eu souvent la satisfaction de voir, soit par les ouvrages, soit par l'enseignement oral de nos élèves, que nos efforts n'avaient pas été tout à fait sans résultat. Mais il est nécessaire qu'un cours complet d'éléments soit conçu et exécuté par un seul; et nous espérons qu'un jour nous pourrons en présenter au moins un programme développé. Voici maintenant

Digitized by Google

la marche que nous avons cru devoir suivre dans l'ouvrage que nous faisons paraître aujourd'hui, et dont l'objet est l'enseignement des méthodes infinitésimales.

Nous avons commencé par donner une idée générale de la méthode des limites; et nous avons fait remarquer en quoi elle était plus simple que celle qu'employaient les anciens géomètres, en partant de la même notion des limites, qui leur était très-familière. Nous avons distingué ensuite les différentes manières dont les grandeurs à mesurer, ou celles auxquelles on les ramène, pouvaient être considérées comme limites de variables d'une espèce plus simple; et nous avons dit qu'elles pouvaient en général se réduire à trois. La première, employée dans quelques cas par Euclide et Archimède, consiste à regarder les grandeurs comme limites de séries; la seconde comme limites de sommes de quantités infiniment petites; la troisième comme limites de rapports d'infiniment petits. Les deux premières se sont présentées à propos de la mesure de la pyramide, de la parabole, de la spirale, de la sphère, des volumes des corps engendrés par la révolution de sections coniques, etc. La troisième s'est présentée à l'occasion du problème des tangentes, et s'applique à beaucoup d'autres questions. La théorie des séries étant en dehors de l'objet de cet ouvrage, nous avons dû nous borner à considérer les quantités comme limites de sommes ou de rapports d'infiniment petits, ou comme dépendant d'une manière quelconque de ces limites.

Nous avons cru devoir, contrairement aux précédents, commencer l'étude du calcul infinitésimal par la considération des limites de sommes; non-seulement parce que c'est l'ordre que la science a suivi dans sa formation, mais parce que la mesure des grandeurs doit naturellement précéder la recherche des tangentes aux courbes, et qu'en cela l'esprit humain a procédé comme la nature des choses le demandait. Il nous a semblé que renverser cet ordre n'était pas un moyen de rendre la science plus claire et plus accessible.

En conséquence, nous nous sommes occupé d'abord de la mesure des aires des figures planes terminées par des courbes, ainsi que des volumes et des surfaces des corps qui ne sont pas terminés de toute part par des plans. Nous ne nous sommes pas borné à montrer comment ces questions se ramenaient à des recherches de limites de sommes d'infiniment petits; mais nous avons fait voir, par un grand nombre d'exemples, comment ces calculs pouvaient être exécutés par des procédés variés, qui ont même quelquefois une assez grande généralité.

Nous avons ainsi fait connaître quelques-unes des méthodes employées par les géomètres qui ont traité les premiers ces sortes de questions. Les procédés que donnera plus tard le calcul intégral n'en seront que mieux appréciés; mais, dans tous les cas, il nous a paru qu'il n'était pas convenable de former toute la science du calcul, avant d'avoir résolu les premières questions à l'occasion desquelles elle a été faite.

Digitized by Google

Nous n'avons pas choisi tous nos exemples dans la géométrie; la statique nous en a offert quelques-uns. Nous avons fait voir généralement comment la détermination des centres de gravité se ramène à celle de limites de sommes; et nous avons effectué les calculs dans un certain nombre de cas simples.

Dans toutes ces recherches, on fait un fréquent usage d'un principe général très-simple, qui consiste en ce que la limite d'une somme d'infiniment petits n'est pas changée, quand on altère ses éléments de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes; ou, en d'autres termes, quand on remplace ces éléments par d'autres dont les rapports avec les premiers ont respectivement pour limite l'unité. Le principe fondamental que nous établissons en commençant est la source des plus grands avantages que présente l'introduction des infiniment petits. Il permet d'en retrancher la partie qui rend le calcul difficile, en donnant un moyen sûr de reconnaître si cette simplification ne conduit à aucune erreur. Par ce moyen, on a toutes les simplifications qu'on trouverait dans une approximation, et en même temps l'exactitude que l'on n'obtiendrait que par de longs et pénibles calculs.

Nous sommes passé ensuite à la considération des limites de rapports d'infiniment petits; le principe précédent s'y applique encore, et les limites ne sont pas changées quand on altère les termes variables des rapports, de quantités infiniment petites par rapport à ces termes. D'où résulte encore l'avantage de

se débarrasser des parties qui font souvent la plus grande difficulté de la question.

Nous avons commencé par faire voir que dans les divers systèmes de détermination des points d'un lieu, le problème des tangentes se ramène immédiatement à celui de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites. Ces quantités sont les accroissements correspondants des deux variables dont les valeurs déterminent les divers points de la courbe. De sorte que le problème général des tangentes revient à ce problème d'analyse : *Étant donnée une équation entre deux variables, trouver la limite du rapport des accroissements infiniment petits correspondants de ces variables.*

On voit ainsi l'intérêt géométrique qu'offre ce problème de calcul; et l'on est naturellement conduit à en chercher la solution générale. Mais nous montrons qu'il s'appliquera encore à beaucoup d'autres questions intéressantes dans la géométrie et la mécanique. La nature de ces questions peut varier à l'infini. Nous en avons choisi particulièrement quelques-unes, à cause de leur importance dans la science. En géométrie, nous avons considéré la courbure des lignes planes, le cercle osculateur, les développées, etc.; en mécanique, la vitesse, l'accélération, le poids spécifique en un point d'une substance non homogène, etc. Nous avons étudié aussi la question générale du déplacement d'une figure sur un plan, et nous avons vu comment se résolvent les problèmes de tangentes auxquels elle donne lieu.

Toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'ici, se ramenant à des limites de sommes ou de rapports, nous avons cru convenable de les exposer et d'en faire des applications particulières avant d'établir les règles du calcul différentiel et du calcul intégral, qui donnent plus de simplicité et de généralité à l'exécution de tous les calculs auxquels elles ramènent. Comme elles sont en elles-mêmes indépendantes des moyens d'exécution des opérations qu'elles indiquent, nous avons cru devoir les présenter avant les longues et pénibles théories d'analyse, qui donnent les meilleures règles pour cette exécution. En suivant la marche inverse, on rebute l'esprit par des recherches abstraites dont il ne voit pas l'objet; et il est même à craindre que les théories géométriques que l'on expose ensuite ne soient prises pour des dépendances des théories analytiques avec lesquelles elles n'ont en elles-mêmes rien de commun, et qui ne leur servent qu'à l'exécution du calcul des limites de sommes ou de rapports, auxquelles ces théories ramènent l'objet de leur recherche.

Telle est la marche que nous avons suivie dans le premier livre de cet ouvrage.

Dans les livres suivants, nous donnons les règles pour trouver les limites des rapports des accroissements infiniment petits de variables liées par des équations données, ainsi que les limites des sommes d'infiniment petits, représentés par une formule générale.

Nous donnons à ces deux problèmes d'analyse,

dont l'un est l'inverse de l'autre, toute l'extension dont ils sont susceptibles, en restant dans le cadre qui convient à de simples éléments; et nous formons ainsi ce que l'on appelle le calcul différentiel et intégral.

Ainsi, dans cet essai, que nous espérons rendre un jour moins imparfait, notre objet a été l'étude de la méthode infinitesimale considérée en elle-même; et les procédés si importants du calcul différentiel et du calcul inverse, ont été les moyens d'exécution des opérations auxquelles cette méthode a ramené la solution des questions qu'elle s'est proposées. Cette subordination, que nous avons tenu à rendre bien explicite et bien sensible, donne la raison de l'ordre que nous avons suivi dans cet ouvrage, et du titre que nous lui avons donné.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

LIVRE I.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES.

CHAPITRE PREMIER.

DES NOMBRES EN GÉNÉRAL.

1. La pluralité nous donne la première idée du nombre; elle constitue ce que l'on appelle le *nombre entier*. Elle se trouve, soit dans la considération simultanée d'objets distincts et séparés, soit dans la décomposition d'une grandeur en parties égales. Un de ces objets ou une de ces parties se nomme *unité*. Le nombre s'appelle aussi le *rapport* de la grandeur décomposée à une grandeur égale à l'une de ses parties.

Cette notion suppose donc d'abord celle de l'égalité pour les grandeurs de l'espèce que l'on considère. Elle suppose ensuite que l'on définisse avec précision ce que l'on entend par *ajouter* ces grandeurs entre elles, et, par suite, ce que c'est que *plus grand* et *plus petit*.

On appelle *somme* de plusieurs nombres le nombre correspondant à la réunion de tous les objets distincts qui avaient donné lieu aux nombres partiels, ou, généralement, à l'*addition* de quantités quelconques qui renfermaient ces nombres d'unités identiques entre elles.

Mais si l'on avait à comparer deux grandeurs dont la plus petite ne fût pas contenue exactement dans l'autre, elles ne présenteraient plus l'idée du rapport tel qu'il vient d'être défini; et comme il est utile dans les sciences de généraliser le plus possible, c'est-à-dire de renfermer le plus grand nombre possible d'idées particulières sous une même dénomination, on a donné de l'extension à la signification des mots *nombre* et *rapport*.

On a d'abord considéré le cas où les deux grandeurs ont une mesure commune. Pour fixer les idées, supposons que cette mesure soit contenue m fois dans l'une et n fois dans l'autre : alors la première est égale à m fois la $n^{ième}$ partie de la seconde, et celle-ci à n fois la $m^{ième}$ partie de la première; on est convenu de dire que le rapport de la première à la seconde est m $n^{ièmes}$, et on l'écrit ainsi, $\frac{m}{n}$. Le rapport de la seconde à la première est dit *réciproque* ou *inverse* du premier, et s'écrira $\frac{n}{m}$.

Ces nouveaux rapports ont encore été appelés des nombres, et pour les distinguer des nombres entiers on les a désignés sous le nom de *nombres fractionnaires*. Sous quelque forme qu'ils se présentent, on dit que deux nombres sont égaux lorsqu'en prenant une même unité ils représentent des grandeurs égales. Si l'une des grandeurs représentées est égale à l'autre augmentée ou diminuée d'une certaine quantité, on dit que le nombre correspondant est plus grand ou plus petit que l'autre. Enfin on dit qu'on ajoute plusieurs nombres quelconques, quand on considère celui qui correspondrait à la somme des quantités qui comparées à une même unité ont donné lieu aux premiers.

Enfin, si l'on considère deux grandeurs qui n'aient pas de mesure commune, et que l'on appelle à cause de cela

incommensurables, elles ne présentent aucune des deux idées précédentes, et il faudra, ou dire qu'elles n'ont pas de rapport, ou donner à la signification des mots *rapport* et *nombre* une nouvelle extension. Mais il ne suffira pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport et que ce rapport sera désigné sous le nom de *nombre incommensurable*, il faudra définir rigoureusement l'égalité des rapports ou nombres incommensurables. Notre manière de voir à cet égard, différente de celle de quelques géomètres, est entièrement conforme au fond à celle d'Euclide.

Observons d'abord qu'en partageant l'une des grandeurs en parties égales suffisamment petites, et les portant dans l'autre autant de fois que possible, le reste sera moindre que l'une des parties, et par conséquent pourra toujours être rendu moindre que toute grandeur donnée; de sorte qu'il existera un rapport commensurable entre l'une quelconque des deux grandeurs et une autre qui différera aussi peu qu'on voudra de la seconde.

Cela posé, considérons deux grandeurs incommensurables; divisons l'une d'elles, par exemple la plus petite, en parties égales dont le nombre croisse indéfiniment; portons-les dans la plus grande et négligeons le reste : il en résultera une suite de rapports ou de nombres commensurables correspondants à la plus petite des grandeurs et à d'autres grandeurs commensurables avec elle et qui diffèrent de la seconde de quantités qui peuvent devenir moindres que toute grandeur désignée. Concevons, en second lieu, deux autres grandeurs incommensurables de même nature l'une que l'autre, mais d'une espèce quelconque, et partageons successivement la plus petite dans le même nombre de parties égales que la plus petite de la première espèce ; on aura de même une nouvelle suite de rapports commensurables; et si ceux qui correspon-

dent de part et d'autre au même mode de division de la plus petite sont toujours égaux, quelque loin qu'on pousse cette division, on dit que les deux premières grandeurs incommensurables ont même rapport ou même *raison* que les deux autres.

2. Mais pour qu'il y ait lieu de définir ainsi l'égalité des rapports incommensurables, il est nécessaire de démontrer que l'égalité des rapports commensurables respectifs est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment; c'est-à-dire que si cette égalité a lieu pour une certaine loi, elle aura lieu pour toute autre. Cette proposition peut être démontrée comme il suit :

Soient A et B deux grandeurs incommensurables d'une espèce quelconque, et A′, B′ deux autres grandeurs incommensurables, soit de la même espèce que les premières, soit de toute autre; admettons que si l'on subdivise A et A′ en un même nombre de parties égales, qui croisse indéfiniment suivant une certaine loi déterminée, on trouve constamment le même nombre de ces parties contenues respectivement dans B et B′ : il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A′ en un même nombre quelconque m de parties égales, non renfermé dans la loi donnée, il se trouvera toujours un nombre égal de ces subdivisions respectives dans B et B′.

En effet, supposons qu'il y ait un nombre k de parties dans B et un nombre différent, par exemple plus grand, dans B′. Alors $k+1$ parties de la première espèce surpasseront B d'une certaine quantité que je désignerai par E; tandis que $k+1$ parties de la seconde seront encore inférieures à B′. Cela posé, décomposons A en parties égales moindres que E, et comprises dans la loi donnée; décomposons A′ en un nombre égal de parties :

d'après l'hypothèse, il devra s'en trouver respectivement le même nombre dans B et dans B'. Mais il est évident qu'il y aura moins de parties plus petites que E dans B que dans B + E ou dans $k + 1$ des subdivisions en question; et il y en aura autant dans ces $k + 1$ subdivisions qu'il y aura de parties correspondantes dans les $k + 1$ subdivisions correspondantes de B', qui sont cependant inférieures à B'. Donc il y aurait dans B un nombre moindre de parties, comprises dans la loi donnée, qu'il n'y aurait de leurs correspondantes dans B'; ce qui est contre l'hypothèse. Il est donc impossible qu'en partageant A et A' en un même nombre quelconque de parties égales, ces parties ne soient pas respectivement comprises dans B et B' le même nombre entier de fois.

La définition de l'inégalité des rapports incommensurables sera la même que pour les rapports commensurables. On dira toujours qu'un rapport est plus grand ou plus petit qu'un autre lorsqu'il est celui d'une quantité plus grande ou plus petite que la première, à la même seconde quantité. Et l'on appellera toujours *somme* des rapports de plusieurs quantités à une même unité, le rapport de la somme de ces quantités à la même unité.

3. C'est au moyen de cette extension qu'Euclide a pu établir des théorèmes généraux dans la comparaison des surfaces entre elles et des solides entre eux. Il n'aurait pas pu dire que deux rectangles de même hauteur sont toujours dans le même rapport que leurs bases, ni que deux parallélipipèdes de même base sont dans le même rapport que leurs hauteurs; et tant d'autres propositions analogues n'auraient pu être énoncées généralement, s'il n'avait défini préalablement, non les rapports, mais l'*égalité* des rapports, dans tous les cas qui peuvent se présenter.

Ce n'est pas que pour les besoins de la pratique il y ait beaucoup d'intérêt à donner ce degré de généralité aux théorèmes relatifs à la comparaison, et, par conséquent, à la mesure des grandeurs; car on peut toujours les rendre commensurables entre elles en les augmentant ou les diminuant de quantités moindres que toute grandeur désignée. Mais au point de vue de la théorie pure, il faudrait dire que les propositions ne sont pas générales et n'ont de sens que quand toutes les grandeurs ont une mesure commune.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

PREMIERS PRINCIPES DE LA THÉORIE DES LIMITES.

4. Les anciens géomètres, partant de la définition de l'égalité des quantités géométriques fondée sur la superposition, et de la notion de l'addition et de la soustraction de ces quantités, sont parvenus facilement à la comparaison et à la mesure des polygones plans, des parallélipipèdes et des prismes quelconques. Mais quand ils voulurent comparer des figures planes terminées par des courbes, ou des solides terminés par des surfaces courbes, les mêmes procédés ne pouvaient plus réussir.

Ils eurent alors l'idée assez naturelle, mais fondamentale, de considérer, au lieu des grandeurs elles-mêmes, d'autres grandeurs de l'espèce de celles qu'ils savaient mesurer, et telles, qu'elles pussent différer des premières de quantités moindres que toute quantité désignée. Ils cherchaient ensuite la relation entre ces grandeurs voisines des proposées, et dont ils rendaient la comparaison aussi facile que la question le permettait. Cette relation leur faisait aisément juger celle qui devait avoir lieu entre les grandeurs proposées; et ils démontraient cette dernière en prouvant, par la méthode pénible de la *réduction à l'absurde*, que la véritable relation ne pouvait en différer.

Ainsi, pour trouver la relation entre les aires de deux cercles quelconques, Euclide commence par démontrer qu'en inscrivant dans un cercle un polygone régulier, et

en doublant successivement le nombre des côtés, la différence de l'aire fixe du cercle et de l'aire variable du polygone peut devenir moindre que toute surface donnée. Cela posé, il inscrit dans les deux cercles des polygones réguliers, et pour que la comparaison soit plus facile, il leur donne le même nombre de côtés : les aires sont alors dans le rapport des carrés des rayons des cercles. En doublant le nombre des côtés de ces polygones, et répétant cette opération indéfiniment, le rapport des aires restera le même, et les polygones pourront différer aussi peu que l'on voudra des cercles proposés; d'après quoi il est facile de prévoir que l'on trouvera ce même rapport pour les cercles eux-mêmes. Mais il se garde bien de tirer aussi promptement la conclusion; elle aurait été l'objet de trop d'attaques, surtout de la part des sophistes qui niaient des choses beaucoup plus évidentes. Il prend le détour que nous avons signalé tout à l'heure, et emploie la méthode de réduction à l'absurde. Il suppose que les deux cercles ne soient pas comme les carrés de leurs rayons, et remarque qu'alors le carré du premier sera au carré du second, comme le premier cercle est à un cercle plus grand ou plus petit que le second. Il examine successivement chacune de ces hypothèses, et démontre, en se fondant sur le lemme cité, qu'elles conduisent à des contradictions : d'où il conclut que ces hypothèses sont fausses, et que, par conséquent, le rapport des carrés des rayons est bien égal à celui des deux cercles. C'est en suivant une marche analogue qu'il ramène la comparaison des pyramides à celle des prismes, le volume du cône à celui du cylindre, etc., etc.

Les modernes, en conservant tout ce qu'il y a de fondamental dans cette méthode, l'ont simplifiée sans diminuer sa rigueur. Nous allons faire connaître la méthode généralement employée aujourd'hui, et nous commence-

rons par poser quelques définitions et quelques principes généraux très-simples.

5. *Limite d'une variable.* — Lorsqu'une grandeur prend successivement des valeurs qui se rapprochent de plus en plus de celle d'une grandeur constante, de telle sorte que la différence avec cette dernière puisse devenir et rester moindre que toute grandeur désignée, soit que la variable soit toujours au-dessous, ou toujours au-dessus, ou tantôt au-dessous et tantôt au-dessus de la constante, on dit que la première *approche indéfiniment* de la seconde, et que celle-ci en est la *limite*.

Ainsi nous appelons *limite* d'une variable, une *quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre.*

6. *Infiniment petits.* — On appelle *quantité infiniment petite, ou simplement infiniment petit, toute grandeur variable dont la limite est zéro.*

Par exemple, la différence d'une variable quelconque à sa limite sera dite infiniment petite, puisqu'elle tend vers zéro. Ainsi la différence de l'aire d'un cercle à celle du polygone régulier inscrit, dont on multiplie indéfiniment le nombre des côtés, est infiniment petite. Il en est de même de la différence d'un cylindre à un prisme inscrit, d'un cône à la pyramide inscrite, etc., etc.

Nous citons ces cas particuliers pour indiquer quelques exemples; mais les infiniment petits peuvent se présenter dans une foule de circonstances où ils ne sont pas la différence d'une variable à sa limite finie.

Principe fondamental des limites.

7. *Si deux quantités variables sont constamment égales et tendent chacune vers une limite, ces deux li-*

mites sont nécessairement égales. — En effet, deux grandeurs toujours égales ne présentent qu'une seule valeur, et il semble inutile de démontrer qu'une valeur variable ne peut pas tendre à la fois vers deux limites inégales, c'est-à-dire vers deux grandeurs constantes, différentes l'une de l'autre.

Il est, au reste, bien facile d'ajouter quelques développements qui rendent plus claire encore, s'il est possible, cette importante proposition. Supposons, en effet, que deux variables toujours égales aient des limites différentes A et B, A étant, par exemple, la plus grande, et surpassant B d'une quantité déterminée Δ. La première variable ayant A pour limite, finira par rester constamment comprise entre deux valeurs, l'une plus grande, l'autre plus petite que A, et ayant avec A une différence aussi petite qu'on voudra; bornons-nous à supposer cette différence moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Semblablement la seconde variable finira par rester indéfiniment à une distance de B moindre que $\frac{1}{2}\Delta$. Or il est évident qu'alors les deux variables ne pourraient plus être égales; ce qui doit être cependant, d'après les données de la question. Ces données sont donc incompatibles avec l'existence d'une différence quelconque entre les limites des variables. Donc ces limites sont égales.

8. *Limites des sommes, produits, quotients ou puissances quelconques de variables.* — 1°. La limite de la somme de variables x, y, z,..., u en nombre fini quelconque, qui ont respectivement pour limites des quantités a, b, c,..., l positives ou négatives, est la somme algébrique de ces limites. En effet, les variables x, y,..., u peuvent être représentées respectivement par $a+\alpha$,

$b+\beta,\ldots, l+\lambda$, les différences α, $\beta,\ldots,\lambda$ ayant toutes pour limite zéro. On aura donc

$$x+y+z+\ldots+u$$
$$=(a+b+c+\ldots+l)+(\alpha+\beta+\ldots+\lambda).$$

Or $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ tend vers la limite zéro, puisqu'il en est ainsi de chacun des termes, en nombre fini, qui composent cette quantité. Donc la limite du second membre, et par conséquent du premier qui lui est toujours égal, est $a+b+c\ldots+l$; ce qu'il fallait démontrer.

2°. La limite du produit de plusieurs variables est le produit de leurs limites. En effet, en employant les mêmes dénominations que dans le cas précédent, on aura

$$xyz\ldots u=(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)\ldots(l+\lambda)=abc\ldots l+\omega,$$

ω désignant la somme d'un nombre fini de termes ayant chacun zéro pour limite, puisqu'ils renferment comme facteurs au moins une des quantités α, β, $\gamma,\ldots,\lambda$, qui ont toutes zéro pour limite. On voit donc que le second membre, ou le premier $xyz\ldots u$, a pour limite $abc\ldots l$; comme il fallait le démontrer.

Dans le cas particulier où le produit $xyz\ldots u$ serait invariable, sa valeur ne pourrait différer de $abc\ldots l$, car ω devrait être constante; et comme on a prouvé qu'il pouvait être moindre que toute grandeur donnée, il ne peut être autre que zéro.

Si, par exemple, on a $xy=1$, il en résultera $ab=1$. Ainsi deux variables dont les valeurs sont toujours réciproques l'une de l'autre, ont des limites réciproques. Cette remarque est d'une application fréquente.

3°. La limite du quotient de deux variables est le quotient de leurs limites, quand la limite du diviseur n'est pas zéro.

En effet,

$$\frac{x}{y}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}.$$

Or le dénominateur de la dernière fraction finit par être aussi près qu'on voudra de b^2, qui est un nombre déterminé différent de zéro; son numérateur tend vers zéro : donc cette fraction a zéro pour limite. La limite de $\frac{x}{y}$ est donc $\frac{a}{b}$, comme nous l'avions annoncé.

On voit que le seul cas à excepter est celui où l'on a $b=0$.

Si $\frac{x}{y}$ était constant, il ne pourrait être que $\frac{a}{b}$; car il faudrait que la fraction $\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$ fût aussi constante; et comme nous avons prouvé qu'elle pouvait différer de zéro aussi peu qu'on voudra, il faut qu'elle soit zéro même.

4°. La limite d'une puissance déterminée d'une variable est égale à la limite de cette variable, élevée à cette même puissance. Si le degré m de la puissance est entier, x^m est le produit de m facteurs égaux à x; et, d'après le premier cas, la limite de x^m sera a^m.

Soit maintenant $m=\frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers quelconques; $x^{\frac{p}{q}}$ est la puissance p de $x^{\frac{1}{q}}$: donc, d'après le cas précédent, la limite de $x^{\frac{p}{q}}$ est la puissance p de la limite de $x^{\frac{1}{q}}$ ou de $\sqrt[q]{x}$; reste donc à trouver cette dernière. Mais x, étant le produit de q facteurs égaux à $\sqrt[q]{x}$, doit avoir pour limite la puissance q de la limite de $\sqrt[q]{x}$, et comme x a pour limite a, il en résulte que a est la puissance q de la limite de $\sqrt[q]{x}$, ou que $\sqrt[q]{x}$ a pour limite

$\sqrt[q]{a}$. Donc $x^{\frac{p}{q}}$ a pour limite $a^{\frac{p}{q}}$, comme nous l'avions annoncé.

Ces principes suffisent pour presque toutes les questions que les éléments peuvent présenter. Nous leur donnerons plus tard une plus grande généralité; mais nous commencerons par faire connaître en quoi consiste la méthode dont ils sont la base, et que nous éclaircirons par des applications variées, propres à en faire bien comprendre l'esprit.

Méthode des limites.

9. Quand on veut trouver une relation entre des grandeurs qui ne se prêtent pas facilement aux comparaisons, on les considère comme limites de grandeurs d'une espèce plus simple, et l'on profite de l'indétermination que cette condition laisse subsister, pour choisir ces variables de manière à faciliter la recherche d'une relation entre elles. Si l'on y peut parvenir, le problème est résolu. En effet, cette relation est réductible à une équation dont les deux membres sont en général des variables constamment égales, dont les limites sont par conséquent égales. Mais chacun de ces membres est composé de termes dans lesquels il n'y a, en général, que des multiplications, des divisions des puissances quelconques des variables introduites. Or, d'après les principes précédents, on aura la limite de chaque terme en y remplaçant les variables par leurs limites, et la limite de chaque membre sera la somme des limites de ses différents termes. D'où l'on voit que, quand on a trouvé la relation entre les variables, on a immédiatement la relation entre les quantités proposées qui en sont les limites, en remplaçant toutes les variables par leurs limites respectives.

10. C'est en cela que consiste la méthode des limites. Elle simplifie la question en ce qu'elle ramène à la recherche d'une relation entre des quantités plus simples, dont le choix est très-indéterminé, et qui ne sont assujetties qu'à tendre indéfiniment vers les quantités proposées, sans jamais se confondre avec elles. Cette relation étant trouvée, il suffit de remplacer toutes les variables par leurs limites pour avoir la relation cherchée.

Il peut arriver que la substitution pure et simple des limites aux variables conduise à des formes indéterminées, comme, par exemple, dans le cas où l'on aura des fractions dont les deux termes auront zéro pour limite. La substitution donnerait alors $\frac{0}{0}$, expression qui n'est l'indication d'aucune véritable opération. On pourrait encore obtenir d'autres expressions sans signification; dans tous ces cas il faudrait recourir à des règles qui seront exposées plus tard.

Il est inutile de dire que, pour la commodité des calculs, il peut être utile d'introduire de nouvelles variables dépendantes des premières. Ainsi, déjà nous avons représenté les variables x, y, z, etc., par $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$, etc.; α, β, γ étaient alors de nouvelles variables tendant vers zéro, en même temps que x, y, z tendaient vers a, b, c. Si, dans le courant du calcul, on voulait tout réduire aux variables x, y, z, etc., il suffirait de remplacer α, β, γ, etc., par $x-a$, $y-b$, $z-c$, etc.

Il peut arriver que les deux membres de l'égalité, quoique composés de quantités variables, restent constants; on aura toujours la relation entre les quantités proposées, en remplaçant les variables par leurs limites. On remarquera seulement que cette substitution, au lieu de donner les limites des deux membres, donne leur valeur constante. Au reste, on aurait facilement deux membres va-

riables, en faisant passer l'un des termes variables d'un membre dans l'autre, ou encore en multipliant par un dénominateur variable; mais ce serait une transformation inutile, et que, par conséquent, il ne faut jamais faire.

Application aux cas simples que présente la géométrie élémentaire.

11. 1°. *Trouver le rapport des surfaces de deux cercles.* — Soient R, R′ les rayons de ces cercles; S, S′ leurs surfaces. On démontrera d'abord, comme Euclide, que ces surfaces peuvent être considérées comme les limites de celles de polygones réguliers inscrits, dont on doublerait indéfiniment le nombre des côtés. On pourrait bien prendre des polygones non réguliers, mais il y aurait plus de difficulté, sans aucun avantage; ou bien encore ne pas s'assujettir à donner le même nombre de côtés aux polygones inscrits dans les deux cercles, mais leur comparaison serait beaucoup plus difficile, et il n'y aurait encore aucun avantage.

Ainsi d'abord nous regarderons les surfaces des deux cercles comme limites de deux polygones réguliers semblables, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Or on sait que deux polygones réguliers semblables sont entre eux comme les carrés des rayons des cercles circonscrits. Si donc on désigne par P, P′ les aires des polygones variables inscrits dans les deux cercles, on aura constamment la proportion

$$\frac{P}{P'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Ayant ainsi une relation entre les variables, il suffira

de les remplacer par leurs limites, pour obtenir celle qui a lieu entre ces dernières ; d'où résulte

$$\frac{C}{C'} = \frac{R^2}{R'^2},$$

et, par conséquent, les surfaces de deux cercles quelconques sont comme les carrés de leurs rayons.

Le cas que nous venons de traiter est celui où les deux membres de l'égalité sont constants. On les aurait eu variables, si l'on avait chassé les dénominateurs, et la relation aurait été

$$PR'^2 = P'R^2.$$

On en aurait conclu

$$CR'^2 = C'R^2,$$

et, par suite,

$$\frac{C}{C'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Mais, comme il n'y a aucun avantage à avoir des membres variables plutôt que constants, il ne faut jamais faire la moindre transformation pour les avoir tels.

2°. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes.* — En effet, on peut démontrer, comme Euclide, que toute pyramide triangulaire est la limite d'une somme de prismes triangulaires. Ces prismes, étant construits simultanément dans deux pyramides qui ont base équivalente et même hauteur, sont respectivement équivalents ; et, par suite, leurs sommes le sont.

Cela posé, les deux pyramides proposées sont les limites de quantités variables toujours égales en valeur, donc elles le sont elles-mêmes ; comme il fallait le démontrer.

Digitized by Google

3°. *Un cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.* — En effet, Euclide a démontré qu'un cône est la limite d'une pyramide ayant même sommet, et pour base un polygone inscrit dans la base du cône, et dont le nombre des côtés croît indéfiniment. Cela posé, désignons par V le volume du cône, par B sa base et par H sa hauteur. Soient V′, B′ le volume et la base de la pyramide inscrite, dont la hauteur aura même valeur H.

Toute pyramide ayant pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur, on aura

$$V' = \frac{1}{3} B' . H.$$

Remplaçant les variables V′, B′ par leurs limites V et B, on aura

$$V = \frac{1}{3} B . H,$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

Les applications aux autres propositions de la géométrie élémentaire seraient aussi simples, et nous ne nous y arrêterons pas.

CHAPITRE III.

RÉFLEXIONS AU SUJET DE QUELQUES DÉFINITIONS.

De l'infini.

12. Le mot *infini* est employé pour exprimer l'absence de limite, de borne quelconque : c'est ainsi que l'espace et le temps sont dits infinis. Cette idée exclut évidemment celle de toute comparaison sous le rapport de la grandeur. Néanmoins, pour abréger le discours, on parle souvent de quantités infinies, on les soumet aux mêmes opérations que les quantités finies, et il est très-important de ne pas se méprendre sur la manière dont ce langage doit être entendu.

Ces quantités dites *infinies* ne peuvent se présenter que de deux manières : ou comme solutions, ou comme données d'une question.

L'infini peut se présenter comme solution lorsque, pour déterminer certaines quantités, on les regarde comme dépendantes d'une autre ; et que dans le cas particulier que l'on a en vue, cette dernière n'existe plus, tandis que pour des cas très-voisins elle aurait des valeurs qui pourraient dépasser toute grandeur assignée. Ainsi, par exemple, pour déterminer un angle, on peut, en général, prendre pour inconnue sa tangente trigonométrique ; mais il faut excepter le cas particulier de l'angle droit. Les équations qui donneront la valeur de cette tangente devront conduire à une expression qui croîtra

indéfiniment, à mesure que les données se rapprocheront de celles qui conduiraient pour solution à l'angle droit. Dans ce dernier cas, l'expression ne doit plus rien représenter, et apprendra par cela même que la question se rapporte à ce cas particulier. La forme qu'elle prendra le plus ordinairement sera celle d'un nombre fini, divisé par zéro. On dit alors que la valeur de l'inconnue est infinie, et que l'angle correspondant est droit; de sorte que la question proposée est possible, et sa solution est déterminée. Mais si la quantité dont la valeur générale se présente dans un cas particulier sous la forme illusoire d'un nombre divisé par zéro, n'est pas une inconnue auxiliaire, mais bien celle que l'on voulait déterminer, il est clair que la question proposée était absurde.

13. L'infini peut encore se présenter autrement que comme solution d'équations dans des cas particuliers; il peut se trouver dans les données mêmes de la question. On peut se proposer de trouver la limite du rapport, de la différence, ou de toute autre fonction de quantités dépendantes les unes des autres, et croissant sans limites. Dans ces divers cas, on dit quelquefois que cette limite est le rapport, ou la différence, ou la fonction quelconque de ces quantités infinies; mais il n'y aurait aucun sens à attribuer à la comparaison des deux infinis, puisque, comme je l'ai déjà dit, l'infini ne signifie pas une grandeur, mais l'absence de limites : ainsi, si l'on mène dans un plan des parallèles équidistantes, il est absurde de dire que les espaces infinis renfermés entre les parallèles consécutives sont égaux. Mais si l'on cherche les rapports de ces espaces croissant indéfiniment, on peut bien se demander quelles sont leurs limites, et l'on

trouve alors un résultat complétement indéterminé; car on peut faire croître indéfiniment les longueurs de deux de ces bandes en établissant entre elles une relation arbitraire; et l'on ne trouverait le rapport de ces *bandes infinies* égal à l'unité que dans des cas très-particuliers.

Ce même langage vicieux est souvent employé quand on veut désigner les limites vers lesquelles tendent des grandeurs variables, lorsque certaines autres grandeurs, dont elles dépendent, croissent sans limite. Ainsi, par exemple, le cercle est la limite vers laquelle tend un polygone régulier inscrit, dont le nombre de côtés croît indéfiniment; et, pour exprimer cette propriété, on dit quelquefois que le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés. On dit encore qu'une droite en rencontre une autre à l'infini, au lieu de dire qu'elle est la limite d'une droite qui rencontre l'autre à une distance qui augmente sans limite.

Toutes ces manières de s'exprimer ont des inconvénients pour ceux dont les idées ne sont pas encore bien faites, et nous ne les emploierons jamais.

Des nombres incommensurables.

14. Lorsque nous avons donné la définition, non pas des rapports incommensurables, mais de l'égalité de rapports de quantités incommensurables entre elles, nous avons fait remarquer que ce n'était que par une extension donnée au mot nombre que l'on pouvait dire que ces quantités ont un rapport qui est un nombre. Il n'y avait donc pas lieu de dire qu'on pouvait approcher indéfiniment du rapport de deux quantités incommensurables, au moyen de rapports commensurables, ni,

par suite, de regarder les nombres incommensurables comme limites des nombres commensurables et d'y appliquer les principes relatifs aux limites.

Mais, après avoir fait l'extension du sens du mot nombre, et avoir défini avec précision l'égalité et l'inégalité des nombres incommensurables, il est bon de remarquer que le rapport de deux quantités incommensurables est la limite de nombres commensurables variables. En effet, nous avons vu qu'on pouvait approcher indéfiniment de la première quantité, au moyen de quantités commensurables avec la seconde, plus grandes ou plus petites que la première, et différant entre elles d'une subdivision de la seconde. Les rapports de ces variables à cette seconde sont commensurables et croissent avec les variables. De plus, pour avoir le rapport incommensurable lui-même, il faudrait, d'après la définition de la somme des nombres, ajouter au rapport variable celui du reste, moindre qu'une subdivision de la seconde quantité, à cette quantité constante tendant vers zéro. Ce dernier rapport, inférieur à celui d'une subdivision qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, tend donc indéfiniment vers zéro. Donc, d'après le sens étendu donné à toutes les expressions, les nombres incommensurables sont limites de nombres commensurables, et tous les principes des limites y sont applicables.

15. On peut arriver à l'idée des nombres incommensurables, autrement qu'en comparant deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure, et par des considérations purement arithmétiques, comme, par exemple, celles des racines, des logarithmes, etc. Dans ces cas on trouve des nombres commensurables qui satisfont à des conditions

de plus en plus voisines des proposées, et qui, en prenant une unité de nature quelconque, représenteraient des quantités concrètes tendant vers des limites déterminées. On convient alors de dire que ces limites incommensurables avec l'unité, ont avec elle des rapports que l'on appellera nombres incommensurables et qui seront dits satisfaire aux conditions ou équations proposées.

Arrivant ainsi à la considération du rapport de deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure, on ajouterait les différents développements que nous avons donnés précédemment.

•

De l'équivalence.

16. La notion de l'équivalence paraît si naturelle et si simple, que les géomètres ont rarement senti la nécessité de la définir. Euclide ne fait aucune différence entre l'équivalence et l'égalité, il se sert du même mot pour désigner l'une et l'autre; il dit égaux deux triangles de même base et de même hauteur. Mais aujourd'hui que l'égalité en géométrie se définit exclusivement par la coïncidence, il n'est plus permis de dire égales des figures qui ne peuvent coïncider; et lorsqu'on les appelle équivalentes, il faut dire sans équivoque ce qu'on entend par là, et qu'il n'y ait pas plus d'obscurité dans l'équivalence d'un cercle avec un carré que dans l'égalité de deux triangles.

Quelques auteurs, voulant faire la distinction des deux égalités, ont appelé la seconde *égalité en surface*, mais ils n'ont donné aucun caractère précis pour la reconnaître. Ils l'ont admise pour les figures résultant de la réunion ou de la soustraction de figures égales, ou pour

les mêmes parties aliquotes d'une même figure conduisant à des figures non superposables. Ainsi, par exemple, on peut partager un parallélogramme en deux parties égales d'une infinité de manières, puisqu'il suffit de le couper par une ligne passant par le point de rencontre de ses diagonales. Toutes ces moitiés, de formes si diverses, sont dites équivalentes. Mais tous ces cas simples seraient insuffisants, et d'ailleurs auraient besoin d'être ramenés à un caractère commun qui servirait alors de définition à l'équivalence. Autrement, on pécherait contre le principe général que nous avons énoncé au commencement de cet ouvrage, et qui consiste en ce que l'application des nombres à l'étude des grandeurs de toute espèce exige préalablement une définition précise de l'égalité, c'est-à-dire des conditions sous lesquelles le rapport de deux grandeurs sera dit égal à l'unité.

Cela posé, nous dirons que deux quantités géométriques sont équivalentes, lorsqu'elles seront *composées de parties égales ou seront limites de quantités variables composées de parties respectivement égales.*

17. On peut remarquer que si l'on conçoit les parties correspondantes de ces quantités évaluées par rapport à une même unité, on trouvera de part et d'autre les mêmes nombres et les mêmes sommes de nombres, de sorte que les quantités équivalentes seront exprimées par les mêmes nombres ou par les limites de nombres égaux. Mais cette propriété ne doit pas être choisie pour servir de définition ; elle est immédiatement fondée sur la précédente, d'après le sens que nous avons attaché à l'égalité et à l'addition des nombres.

Les quantités équivalentes étant exprimées par des

nombres égaux, toutes les opérations de soustraction, de division, etc., faites sur des quantités équivalentes donneront les quantités exprimées par des nombres égaux, et, par conséquent, équivalentes. Par exemple, de quelque manière qu'on partage un parallélogramme en deux parties égales, toutes ces figures non superposables seront équivalentes.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

DES DIFFÉRENTES MANIÈRES DONT LES QUANTITÉS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE VARIABLES.

18. Les grandeurs peuvent être considérées comme dépendant de limites de variables, de bien des manières différentes. Les formes de leurs expressions peuvent être aussi diverses que celles des questions mêmes dont elles sont les solutions.

Mais lorsqu'il s'agit seulement de ramener une quantité à d'autres plus faciles à traiter, et qu'on n'aperçoit pas immédiatement une quantité variable d'une espèce plus simple dont elle soit la limite, on emploie le plus ordinairement l'un des deux procédés suivants, qui ont été imaginés par les géomètres anciens et considérablement développés par les modernes.

Ces deux procédés ont cela de commun qu'ils consistent l'un et l'autre à enlever successivement de la quantité proposée des quantités d'une espèce plus simple, en laissant un reste qui présente bien les mêmes difficultés que la quantité en question, mais qui diminue de plus en plus et a pour limite zéro. Par là on tend de plus en plus à épuiser la quantité, ce qui a fait donner à la méthode fondée sur ces procédés le nom de méthode d'*exhaustion*. Mais il y a deux manières très-différentes de procéder à

l'épuisement de la quantité. Dans l'une on enlève d'abord une certaine quantité déterminée, et l'on ne s'occupe plus que de ce qui reste; puis on enlève de ce reste une nouvelle quantité déterminée, et l'on obtient un nouveau reste sur lequel on agit de même; et ainsi de suite indéfiniment, de telle sorte que les restes puissent devenir moindres que toute quantité donnée : de cette manière, la quantité est la limite d'une somme de quantités fixes dont le nombre augmente indéfiniment.

On appelle *série* une suite de grandeurs déterminées dont le nombre est indéfini. En employant cette expression, ce premier procédé revient donc à considérer une grandeur comme *limite de la somme des termes d'une série*. Le second procédé, dû à Archimède, consiste à considérer dans la grandeur des parties d'espèce plus simple, non pas fixes comme dans le premier, mais décroissant chacune indéfiniment; ces parties variables ayant zéro pour limite sont ce que nous avons appelé des *infiniment petits*. Leur nombre augmente indéfiniment, et elles doivent être choisies de telle sorte que leur somme diffère de la grandeur en question d'une quantité qui puisse devenir moindre que toute quantité donnée. De cette manière, les grandeurs sont considérées comme *limites de sommes de quantités infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment*.

Les anciens ont connu ces deux procédés comme nous l'avons dit : nous en donnerons tout à l'heure quelques exemples.

19. Les modernes ont fait entrer d'une autre manière encore les infiniment petits dans l'expression des variables dont les limites font connaître les quantités cherchées : ils ont considéré les rapports des infiniment petits entre eux. Lorsque deux quantités tendent vers

zéro en dépendant l'une de l'autre, leur rapport est une quantité déterminée qui tend en général vers une limite finie. Cette considération, inconnue aux anciens, est un des plus grands progrès que la science doive aux modernes.

L'objet principal de cet ouvrage est de traiter des infiniment petits sous ces deux points de vue. Nous aurons cependant l'occasion d'employer les séries dans l'évaluation des grandeurs, et d'ailleurs nous ne pouvons nous dispenser de dire quelques mots sur la manière dont elles ont été introduites par les anciens géomètres.

CHAPITRE V.

DES GRANDEURS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SÉRIES.

20. *Pyramides triangulaires.* — Nous avons dit précédemment qu'Euclide avait démontré qu'une pyramide triangulaire était limite d'une somme de prismes; nous allons faire connaître le mode de décomposition qu'il emploie, et qui conduit à une série.

Soit la pyramide SABC (*fig.* 1); désignons sa base par b et sa hauteur par h. En joignant les milieux des arêtes, on forme deux prismes triangulaires équivalents DEFAHG, HEICFG, et deux pyramides triangulaires EHBI, SDEF, égales entre elles, semblables à la première et ayant leurs arêtes deux fois moindres que les siennes. L'un des deux prismes a pour base le quart de ABC ou de b, et pour hauteur la moitié de h. Il est plus grand que l'une des deux pyramides; car en joignant DH, DG, la pyramide DAHG serait égale à l'une d'elles et serait renfermée dans le prisme; d'où il suit que la somme des deux prismes, étant plus grande que les deux pyramides restantes, est supérieure à la moitié de la pyramide proposée. En décomposant les deux pyramides de la même manière que la première, les prismes que l'on formera seront supérieurs à la moitié de ces pyramides, et il restera un nombre double de pyramides ayant leurs arêtes moitié moindres.

En continuant ainsi indéfiniment, on obtient une somme de prismes en nombre indéfiniment croissant et

dont la somme peut différer aussi peu qu'on le voudra du volume de la pyramide. En effet, après avoir enlevé les prismes de premier ordre, il reste moins de la moitié de la pyramide; après avoir enlevé de ce reste les prismes de second ordre, le reste est moindre que la moitié du premier et, par conséquent, que le quart de la pyramide. Le troisième reste, moindre que la moitié du second, sera moindre que le huitième de la pyramide, et ainsi de suite. Donc on peut arriver à un reste moindre que tout volume désigné, puisque, en partageant une quantité fixe en un nombre de parties qu'on double indéfiniment, on peut arriver à des parties moindres que toute grandeur donnée. La pyramide est donc la limite de la somme des prismes d'ordres successifs, obtenus comme nous l'avons indiqué. C'est ainsi qu'Euclide a démontré cette proposition, et on en conclut, comme nous l'avons vu précédemment, que deux pyramides triangulaires de base équivalente et de même hauteur sont équivalentes.

21. Mais nous allons en faire un autre usage et en déduire immédiatement le volume même de la pyramide. Nous remarquerons pour cela que la somme des prismes de premier ordre a pour mesure $\frac{bh}{4}$, puisque chacun des deux a pour mesure $\frac{bh}{8}$. Or les prismes d'un ordre quelconque sont en nombre double de ceux de l'ordre précédent; mais leurs dimensions étant moitié moindres, leurs volumes seraient huit fois moindres; leur somme sera donc le quart de la précédente.

Les termes de la série dont la limite est le volume de la pyramide seront donc

$$\frac{bh}{4}, \quad \frac{bh}{4^2}, \quad \frac{bh}{4^3}, \ldots,$$

et si l'on désigne par V_n le volume de la somme des prismes jusqu'à un ordre quelconque n, on aura

$$V_n = bh\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \cdots + \frac{1}{4^n}\right).$$

Les limites des deux nombres devant être égales, et la première étant le volume de la pyramide, ce dernier sera égal au produit de bh par la limite de la somme des termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots.$$

Cette série est la première qui ait été sommée, et elle l'a été par Archimède à l'occasion de l'aire de la parabole. Sa limite est $\frac{1}{3}$; d'où il suit que la mesure du volume de la pyramide est $\frac{bh}{3}$.

22. *Aire du segment parabolique.*— Cherchons maintenant l'aire d'un segment parabolique quelconque ASB.

Soit SC (*fig.* 2) le diamètre des cordes parallèles à AB; C sera le milieu de AB, et la tangente en S sera parallèle à AB. Le triangle ASB, moitié du parallélogramme ABA'B' dont les côtés AA', BB' sont parallèles à SC, et qui, par conséquent, renferme le segment ASB, sera plus grand que la moitié de ce segment.

Faisons pour les deux segments dont les bases sont SA, SB, ce que nous venons de faire pour le premier; les triangles SDB, AD'S seront supérieurs aux moitiés de ces segments. Agissons de même pour les quatre segments restants dont les bases sont BD, DS, SD', D'A, et continuons ainsi indéfiniment. Il est facile de voir que le premier triangle ASB, plus les deux triangles de second

ordre, plus les quatre de troisième ordre, plus les huit de quatrième, etc., forment une somme dont la limite est le segment ASB. Car on prend d'abord plus de sa moitié, ensuite plus de la moitié du premier reste, plus de la moitié du second, et ainsi de suite indéfiniment. D'où l'on conclut, par les mêmes raisons que dans l'exemple précédent, que le segment est la limite de la somme des triangles.

Cette démonstration est due à Archimède; il a prouvé ensuite que la somme des triangles d'un ordre quelconque est le quart de la somme de ceux de l'ordre précédent. Soit, par exemple, le segment ASB; menons DI, EH parallèles à BC, E étant le milieu de SB. On aura

$$BC = 2\,EH = 2\,DI;$$

d'où résulte, d'après la propriété des ordonnées de la parabole,

$$SI = \frac{1}{4}\,SC, \quad \text{et, par suite,} \quad IK = \frac{1}{4}\,CB,$$

d'où

$$DK = \frac{1}{4}\,CB.$$

Mais les triangles SCB, SDB, ayant même base SB, sont comme leurs hauteurs, ou comme les parallèles CB, DK; donc

$$SDB = \frac{1}{4}\,CSB.$$

De même on aura

$$SD'A = \frac{1}{4}\,SAC.$$

Donc les deux triangles auxquels donne naissance un triangle ASB, d'un ordre précédent, forment une somme égale au quart de celui-ci; car ce que nous venons de dire de ASB peut se dire d'un triangle d'un ordre quelconque.

Il résulte de là que les sommes des triangles des différents ordres forment la progression géométrique suivante :

$$\text{ASB}, \quad \frac{\text{ASB}}{4}, \quad \frac{\text{ASB}}{4.4}, \quad \frac{\text{ASB}}{4.4.4}, \ldots$$

C'est précisément à cette occasion qu'Archimède a trouvé la formule de la somme des termes d'une progression.

Nous n'achèverons pas la solution comme Archimède; mais, d'après le principe des limites, nous nous bornerons à prendre la limite de la somme des termes de cette progression, et nous aurons ainsi la valeur exacte de la limite de la somme des triangles, c'est-à-dire la valeur du segment parabolique. Cette limite est

$$\frac{4}{3}\text{ASB} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\text{AA}'\text{BB}'.$$

On peut remarquer que les deux parties ASC, CSB du segment sont équivalentes; car elles sont les limites de sommes de triangles respectivement équivalents. Ainsi la surface SDBC est égale à $\frac{2}{3}$ SCBB'.

23. *Cercle considéré comme limite d'une série.* — Euclide inscrit d'abord un carré dans le cercle, puis il joint les milieux des quatre arcs aux extrémités des côtés, et ajoute ainsi quatre triangles au carré, d'où résulte un octogone régulier inscrit. Il joint ensuite les milieux des nouveaux arcs aux extrémités des côtés de cet octogone, ce qui ajoute huit nouveaux triangles et donne le polygone régulier de seize côtés; et il continue ainsi indéfiniment. Or il est facile de voir que la série dont les termes seraient les sommes successives des triangles de même ordre a pour limite l'aire du cercle. En effet, soient AB (*fig.* 3) un côté d'un polygone régulier quelconque, OM le milieu de l'arc sous-tendu et I le milieu du côté. Le

triangle AMB est plus grand que la moitié du segment AMB; car il est moitié du rectangle ayant pour base AB et pour hauteur MI, et dont le segment n'est qu'une partie. Donc les triangles que l'on ajoute à un polygone régulier inscrit, en doublant le nombre de ses côtés, forment plus de la moitié de la différence de ce polygone au cercle. Si donc on part du carré inscrit, qui est plus grand que la moitié du cercle même, puisqu'il est la moitié du carré circonscrit, il s'ensuit qu'en enlevant du cercle le carré et les divers ordres de triangles successifs, on prend d'abord plus de la moitié du cercle, ensuite plus de la moitié du reste, et ainsi de suite indéfiniment. C'est ainsi qu'Euclide arrive à la conséquence que la somme des segments qui constituent la différence des polygones au cercle peut devenir moindre que toute quantité donnée; et que, par conséquent, en employant notre langage, le cercle est la limite de polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés augmente indéfiniment.

24. On pourrait bien arriver à cette même conséquence en considérant immédiatement les polygones inscrits sans s'occuper des triangles qui s'y ajoutent pour former le polygone suivant. On remarquera même que le premier procédé suppose que le nombre des côtés va toujours en se doublant; ce qui n'est pas nécessaire à l'exactitude de la proposition. Mais il faudrait alors considérer en même temps des polygones circonscrits semblables, et prouver que la différence des aires de deux polygones semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle, peut devenir moindre que toute quantité donnée; et la différence du cercle à l'un ou l'autre de ces deux polygones étant moindre que cette même quantité, il s'ensuivrait que le cercle serait la limite des aires des polygones réguliers inscrits ou circonscrits dont le nombre des côtés

augmente indéfiniment. Nous n'entrerons pas davantage dans ces détails qui n'offrent aucune difficulté.

25. On voit que c'est aux anciens géomètres qu'on doit l'idée de considérer les grandeurs comme limites de séries ; soit pour calculer la grandeur cherchée, en déterminant la limite de la série, comme Archimède l'a fait, par exemple, pour l'aire de la parabole ; soit simplement pour employer les termes plus simples de la série dans la comparaison de la grandeur avec une autre, comme Euclide l'a fait pour deux pyramides triangulaires. Les modernes sont allés beaucoup plus loin sans doute dans cette voie ; mais il ne faut pas oublier que le premier pas était fait et, de plus, que c'est à Archimède qu'on doit les formules pour la sommation d'autres séries importantes que les progressions géométriques, savoir la suite des carrés des nombres naturels et celle des sinus d'arcs en progression par différence.

CHAPITRE VI.

DES GRANDEURS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

26. Une des conceptions les plus importantes dans la mesure des grandeurs, est celle par laquelle on les considère comme limites de sommes de quantités d'espèce plus simple, qui tendent indéfiniment vers zéro, en même temps que leur nombre augmente indéfiniment. Ces infiniment petits sont susceptibles d'une grande indétermination; ils ne sont assujettis qu'à la condition que la différence de leur somme à la quantité proposée ait pour limite zéro. Il reste donc beaucoup de latitude dans le choix de ces éléments, et l'on peut en profiter pour simplifier considérablement les calculs.

Le principe fondamental sur lequel se fondent ces simplifications est le suivant :

Théorème. — *La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*

Soient, en effet, les infiniment petits

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m,$$

dont la somme tend vers une limite à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. Soient d'autres infiniment petits

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_m,$$

tels, que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_m}{\beta_m}$$

aient tous pour limite l'unité.

Or on sait que si l'on a une suite de fractions dont les dénominateurs soient positifs et les numérateurs de signes quelconques, la somme algébrique des numérateurs divisée par la somme des dénominateurs est intermédiaire entre les deux qui sont algébriquement la plus petite et la plus grande.

La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m},$$

sera donc comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes, et tendra nécessairement aussi vers l'unité; d'où il résulte que les limites de son numérateur et de son dénominateur sont égales; la somme $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_m$ a donc la même limite que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'une de ces deux sommes était invariable, la limite de l'autre serait égale à la valeur constante de la première, puisque la limite de leur rapport est l'unité.

Remarque. — Si le rapport de deux éléments correspondants quelconques des deux sommes, au lieu de tendre vers l'unité, tendait vers une même limite quelconque l, le rapport des deux sommes serait compris entre deux rapports ayant l pour limite, et aurait, par conséquent, cette même limite. Donc les limites des deux sommes ont précisément l pour rapport.

On voit donc que la recherche des limites de sommes d'infiniment petits peut conduire à celle des limites des rapports, que nous aurons bientôt à considérer directement. Cette dernière recherche est facilitée par un théorème analogue au précédent, et qu'il est bon d'établir dès à présent.

27. Deuxième théorème. — *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.*

Soient, en effet, α et β deux quantités infiniment petites; α' et β' d'autres quantités telles, que les limites de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et de $\frac{\beta}{\beta'}$ soient égales à l'unité, et que, par suite, les limites des rapports inverses $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\beta}$ soient aussi égales à l'unité; on aura identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Les limites de quantités égales étant égales, et la limite d'un produit étant le produit des limites, on tirera de cette identité, en désignant les limites par l'abréviation *lim.*, et observant que $\lim.\frac{\beta'}{\beta}=1$ et $\lim.\frac{\alpha'}{\alpha}=1$,

$$\lim.\frac{\alpha}{\beta}=\lim.\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

28. On peut énoncer ces deux mêmes théorèmes d'une autre manière, au moyen de la proposition suivante :

Lorsque la limite du rapport de deux quantités est l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'une quelconque des deux; c'est-à-dire que *le rapport de cette différence à l'une quelconque de ces quantités a pour limite zéro.*

Et réciproquement : *Si la différence de deux quantités est infiniment petite par rapport à l'une d'elles, la limite de leur rapport est l'unité.*

Soient, en effet, α et α' deux quantités quelconques et δ leur différence; on aura

$$\alpha' = \alpha + \delta, \quad \text{d'où} \quad 1 = \frac{\alpha}{\alpha'} + \frac{\delta}{\alpha'}.$$

Donc, si la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, celle de $\frac{\delta}{\alpha'}$ est zéro, et réciproquement.

Si l'on avait divisé par α au lieu de α', on aurait prouvé que $\frac{\delta}{\alpha}$ a pour limite zéro; et d'ailleurs il est évident que δ, étant la différence de α et α', est contenue dans le plus grand une fois de plus que dans l'autre, et que, par conséquent, les rapports $\frac{\delta}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha'}$ sont en même temps infiniment petits.

On pourra donc énoncer le premier théorème de cette autre manière :

La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée, quand on les remplace respectivement par d'autres qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites par rapport à eux.

Le grand avantage que l'on retire de ces théorèmes consiste en ce qu'ils permettent souvent de négliger, dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison et le calcul difficiles. Il suffit toujours que cette partie soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites.

Divers ordres d'infiniment petits.

29. Si l'on considère plusieurs infiniment petits dépendant les uns des autres, de telle sorte que, l'un étant déter-

miné, tous les autres le soient, et que l'on en prenne un en particulier pour y rapporter tous les autres, on appellera infiniment petits du premier ordre ceux dont les rapports avec celui-là auront des limites finies; infiniment petits du second ordre, ceux dont les rapports avec le même infiniment petit principal seront des infiniment petits du premier ordre; et en général infiniment petits de l'ordre n, ceux dont les rapports avec l'infiniment petit principal seront des infiniment petits de l'ordre $n-1$.

Lorsque l'on veut exprimer seulement que le rapport d'un infiniment petit à un autre a pour limite zéro, on dit que le premier est infiniment petit par rapport au second.

Cela posé, il est très-facile d'exprimer au moyen de l'infiniment petit principal, ceux de tous les ordres différents. En effet, désignons le premier par α, et par β un infiniment petit du premier ordre dont la limite du rapport avec α soit K; on aura

$$\frac{\beta}{\alpha} = K + \omega, \quad \text{d'où} \quad \beta = \alpha(K + \omega),$$

ω tendant vers zéro en même temps que α.

L'expression de tout infiniment petit du premier ordre sera donc de la forme

$$\alpha(K + \omega),$$

ω étant infiniment petit, et K fini.

Soit maintenant γ un infiniment petit du second ordre, le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$ devant être du premier ordre; on aura

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha(K + \omega);$$

et, par conséquent, la forme de tout infiniment petit du

second ordre sera

$$\alpha^2 (K + \omega).$$

En continuant ainsi, il est facile de voir que la forme générale des infiniment petits de l'ordre n est

$$\alpha^n (K + \omega),$$

K étant fini, et ω infiniment petit.

Mais il y a souvent lieu de considérer des infiniment petits dont le rapport avec une puissance fractionnaire de α a une limite finie; et l'on est convenu d'appeler infiniment petit de l'ordre $\frac{p}{q}$ celui dont le rapport avec $\alpha^{\frac{p}{q}}$ a une limite finie : la formule qui représentera les quantités de cet ordre sera donc

$$\alpha^{\frac{p}{q}} (K + \omega).$$

CHAPITRE VII.

COMMENT LES AIRES DES COURBES PLANES PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

30. *Sommes de parallélogrammes infiniment petits.*— Considérons une surface plane limitée par des arcs de courbes quelconques; divisons-la par un système de parallèles dont les distances soient dans des rapports arbitraires, mais tendent toutes vers zéro. La somme des aires comprises entre ces parallèles successives est toujours identique avec l'aire cherchée, et chacune de ces aires élémentaires offre la même difficulté que la proposée, puisqu'elle renferme des courbes dans son périmètre.

Mais si à chacune de ces aires élémentaires on supprime ou l'on ajoute des parties infiniment petites par rapport à ces aires respectives, et qui fassent disparaître la partie courbe de leur périmètre, la limite de la somme de ces nouvelles aires plus simples sera l'aire cherchée, d'après le principe général. Le moyen le plus commode d'obtenir ce résultat consiste à mener par les extrémités de chacune des cordes des parallèles à une même direction arbitraire, terminées à la corde suivante. Soient, en effet, MN, M'N' deux parallèles consécutives quelconques : en menant par les extrémités M', N' (*fig.* 4) des parallèles M'H', N'I' à une direction choisie à volonté, on retranche les parties N'I'N, M'H'M; en menant les parallèles MH, NI par les extrémités M, N, on ajouterait, au contraire, les parties MHM', NN'I. Or deux de ces

quatre parties sont moindres que le parallélogramme MN'I', et les deux autres moindres que le parallélogramme MHM'H'; ces deux parallélogrammes sont infiniment petits par rapport au parallélogramme M'H'N'I', qui est moindre que le segment de la courbe, car leurs rapports à M'H'N'I' sont les mêmes que ceux de leurs bases MH', NI' à la base H'I', et ces derniers tendent vers zéro, puisque les parallèles MN, M'N' se rapprochant indéfiniment, MH' et NI' tendent vers zéro, tandis que H'I' reste fini. Il suit de là que les rapports des parallélogrammes HH', II' au segment de la courbe ont pour limite zéro; il en est de même, à plus forte raison, des triangles formés par les arcs MM', NN', et, par conséquent, *l'aire de la courbe est la limite de la somme des parallélogrammes ayant pour bases les cordes parallèles, pour hauteurs leurs distances, et pouvant être entièrement intérieurs, ou en partie extérieurs à cette aire.*

On peut même remarquer qu'il n'est pas nécessaire que les sommets des parallélogrammes soient aux extrémités mêmes des cordes : il suffit qu'ils soient en des points infiniment voisins de ces extrémités; il n'est même pas nécessaire que ces parallélogrammes soient contigus, pourvu que l'intervalle entre deux consécutifs soit infiniment petit par rapport aux hauteurs infiniment petites de ces parallélogrammes, car cela revient à retrancher de chaque élément une partie infiniment petite par rapport à lui-même. Cette considération générale, dont l'exactitude résulte du principe fondamental, s'applique à tout ce qui suit.

Pour abréger, nous représenterons une somme de termes ayant une même expression générale par le signe $\sum$ suivi de cette expression. Ainsi, u désignant une corde quelconque et x la distance de deux cordes

consécutives, $\sum u\alpha$ représentera la somme des aires des parallélogrammes variables, et lim. $\sum u\alpha$ représentera la limite de leur somme, ou l'aire de la courbe.

31. *Sommes de trapèzes infiniment petits.* — Au lieu de supposer les lignes MH, M'H', NI, N'I' parallèles à une direction fixe, on pourrait les mener dans des directions différentes les unes des autres, et variables d'une manière arbitraire d'une tranche à l'autre : il suffit qu'elles fassent toujours un angle fini avec les cordes. En effet, la figure NIN'I' deviendra un trapèze dont les bases N'I, NI' seront infiniment petites, puisque les lignes N'I', NI font avec MN des angles finis, et que la hauteur du trapèze est infiniment petite ; la mesure de ce trapèze a donc un rapport infiniment petit avec celle du trapèze intérieur M'H'N'I' et, par conséquent, avec le segment même de la courbe. Il en serait de même du trapèze MHM'H'. Si donc, au lieu de ce segment, on prend un des trapèzes ayant pour base MN, M'N', MI' ou NH', on ne fait qu'ajouter ou retrancher à l'élément exact de l'aire cherchée, une quantité infiniment petite par rapport à cet élément, et la limite de la somme de ces trapèzes sera précisément égale à la somme des éléments exacts de cette aire ou à cette aire elle-même.

Le cas le plus simple est celui des trapèzes inscrits dans le segment : les côtés non parallèles sont alors les cordes MM', NN'. Il peut aussi être quelquefois utile de faire concourir toutes les lignes MH, M'H', NI, N'I' vers un même point ; et c'est ce qu'a fait Archimède dans une de ses méthodes pour la quadrature de la parabole.

32. *Sommes de secteurs infiniment petits.* — Il n'est

pas nécessaire de supposer parallèles les cordes qui divisent l'aire en éléments infiniment petits. On peut assujettir leurs directions à une loi quelconque, suivant les circonstances; la seule condition nécessaire est de n'ajouter ou retrancher à chaque élément exact qu'une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Une des lois les plus simples est celle qui fait passer toutes les cordes par un même point. Soient O ce point (*fig.* 5) et OM, OM′ deux sécantes faisant entre elles un angle infiniment petit; la somme des éléments OM′M est identique avec l'aire cherchée, si le point O est dans son intérieur, et cette aire sera la limite de la somme des aires que l'on obtiendra en ajoutant ou retranchant à chacun de ces éléments une quantité infiniment petite par rapport à lui.

Cette modification des éléments exacts, et qui a toujours pour objet de les simplifier, peut être faite de bien des manières différentes. On pourrait mener par M, M′, des droites dans des directions déterminées, et substituer les triangles rectilignes à l'élément exact; on pourrait aussi, au lieu de lignes droites, mener des courbes arbitraires; mais ce qui est ordinairement le plus simple, c'est de décrire des arcs de cercle ayant O pour centre, et c'est ce qu'a fait Archimède dans sa quadrature de la spirale.

Il est facile de voir, en effet, que le rapport des deux secteurs circulaires semblables ayant pour rayons OM, OM′, étant celui des carrés de ces lignes, a pour limite l'unité, et que, par conséquent, leur différence est infiniment petite par rapport à ces secteurs. Or l'un de ces secteurs est compris entièrement dans l'élément OM′M, et celui-ci est compris entièrement dans l'autre secteur; car on peut supposer l'angle O assez petit pour que les rayons vecteurs de la courbe croissent ou décroissent constamment de M en M′. Donc le rapport de chacun des deux

secteurs à l'élément exact de l'aire a aussi pour limite l'unité, et l'aire cherchée est la limite de la somme des secteurs circulaires infiniment petits, intérieurs ou extérieurs.

Si le point O n'était pas dans l'intérieur de l'aire proposée, celle-ci serait la différence de deux aires auxquelles ce point appartiendrait, et que l'on considérerait séparément, comme on vient de le dire. On pourrait aussi prendre la différence de deux secteurs compris entre les mêmes rayons, et chercher la limite de la somme de ces différences.

Au lieu de supposer que les cordes passent par un même point, on pourrait les mener tangentes à une courbe donnée; on pourrait les assujettir à d'autres lois encore : toutes ces généralisations n'offrent aucune difficulté quand on a bien saisi les principes précédents, et nous ne nous y arrêterons pas.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A QUELQUES EXEMPLES.

33. *Aire du segment parabolique.* — Cette question nous offrira des exemples de procédés très-divers qu'on peut employer dans la recherche des quadratures, et donnera une idée de la variété des ressources que présente la méthode infinitésimale.

Première solution. — En rapportant la parabole au diamètre AB (*fig.* 6) de la base CD du segment oblique donné, et à la tangente AY parallèle à cette base, les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses, et l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 = 2px.$$

Coupons la surface par des parallèles à AY; l'aire ADC pourra être considérée comme limite de la somme de parallélogrammes intérieurs qui seront divisés en deux parties égales par le diamètre AB; de sorte que les deux aires ABC, ABD, étant limites de sommes égales, sont équivalentes. Il suffit donc de calculer la moitié ABC.

On connaîtra l'aire ABC si l'on connaît son rapport au complément AEC de cette aire au parallélogramme ABCE; et pour cela, nous comparerons deux parallélogrammes correspondants PMHP′, QMKQ′ des sommes qui ont pour limites ces deux aires. En désignant par x, y les coordonnées du point quelconque M, et par h et k les accroissements qu'elles subissent quand on passe de M à

M′, on aura

$$\frac{\text{PMHP}'}{\text{QMKQ}'} = \frac{yh}{xk},$$

et l'on a, par l'équation de la courbe,

$$y^2 = 2px, \quad (y+k)^2 = 2p(x+h),$$

d'où

$$2yk + k^2 = 2ph.$$

On tire de là h, au moyen de k, et le rapport cherché $\frac{yh}{xk}$ devient

$$\frac{y(2y+k)}{2px} \quad \text{ou} \quad 2 + \frac{ky}{2px}.$$

Ce rapport tend donc vers la limite 2 lorsque k tend vers zéro. Les deux aires ACB, AEC sont donc les limites de sommes d'infiniment petits tels, que le rapport de deux correspondants quelconques tend vers la même limite 2 : donc, d'après les principes démontrés (n° 26), le rapport des aires ACB, AEC est précisément 2.

Ainsi l'aire ACB est les deux tiers du parallélogramme AECB; et l'aire proposée ACD est les $\frac{4}{3}$ de ce même parallélogramme, ou du triangle rectiligne ACD, comme Archimède l'a démontré le premier.

Deuxième solution. — Il est facile de calculer directement l'aire AEC, qui est la limite de la somme des parallélogrammes QMKQ′ ou QHM′Q′, dont l'expression générale est $xk \sin A$, A désignant l'angle YAX. k désignant l'accroissement successif de y, il est nécessaire d'exprimer x au moyen de y; ce qui donnera pour expression d'un quelconque des parallélogrammes $\frac{y^2 k \sin A}{2p}$. Or si l'on suppose dans ce cas-ci que les hauteurs des parallélogrammes soient toutes égales, ce qui

était inutile dans la solution précédente, les valeurs successives de y seront

$$k, \quad 2k, \quad 3k \ldots, \quad nk,$$

et l'on aura

$$nk = \mathrm{AE}, \quad \text{ou} \quad (n+1)k = \mathrm{AE},$$

suivant qu'on prendra les parallélogrammes QM′ ou QK, ce qui est indifférent.

Il s'agit donc de trouver la limite de la somme

$$\frac{k^3 \sin \mathrm{A}}{2p}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

lorsque n croît indéfiniment, et que k décroît en même temps de telle sorte que l'on ait toujours $nk = \mathrm{AE}$.

Or Archimède a donné pour la sommation des carrés des nombres naturels une formule qui, écrite avec les signes employés par les modernes, donne

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Il faut donc trouver la limite de l'expression suivante

$$\frac{k^3 \sin \mathrm{A}}{2.p} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

ou

$$\frac{\mathrm{AE}(\mathrm{AE}+k)(2\mathrm{AE}+k)\sin \mathrm{A}}{2.2.3p},$$

lorsque k tend vers zéro. Cette limite est évidemment

$$\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2 . \sin \mathrm{A}}{2.3p} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AE} \sin \mathrm{A}}{3}$$

en observant que $\frac{\overline{\mathrm{AE}}^2}{2p} = \mathrm{AB}$.

L'aire AEC est donc le tiers du parallélogramme ABCE;

et l'aire ABC en est les deux tiers, comme nous l'avions trouvé par le premier procédé.

Troisième solution. — Cette solution aura l'avantage de donner un exemple d'un mode de décomposition très-différent des précédents. Nous y considérerons une aire comme limite d'une somme d'aires infiniment petites déterminées par des droites tangentes à une même courbe.

Soient ACC′ (*fig.* 7) le segment parabolique; AB le diamètre, CD la tangente en C, d'où résulte AD = AB; nous allons comparer les deux aires ACB, DAC.

Nous considérerons ACB comme limite d'une somme de trapèzes inscrits PMM′P′, dont les côtés PP′ situés sur AB tendent tous d'une manière quelconque vers zéro.

Quant à l'aire DAC, nous mènerons en M et M′ les deux tangentes MT, M′T′, d'où résultera AT = AP, AT′ = AP′, TT′ = PP′. Si par le point de rencontre R de ces tangentes on mène une parallèle à AB, on aura le diamètre des cordes MM′ qui passera par conséquent par le milieu de MM′; de sorte que l'aire du triangle TRT′ sera la moitié de celle du trapèze PP′MM′. Or il est facile de reconnaître que l'aire DAC est la limite de la somme des triangles T′TR. En effet, cette aire est exactement la somme des aires comprises entre chacun des arcs MM′, la tangente M′T′, la base T′T et la tangente TM, terminée en M. Mais chacune de ces aires diffère du triangle correspondant T′TR d'une quantité infiniment petite par rapport à lui, lorsque PP′ tend vers zéro; car cette différence est moindre que le triangle rectiligne MRM′ dont le rapport au triangle T′RT est celui des rectangles des côtés qui comprennent leurs angles en R, qui sont supplémentaires; rapport qui est évidemment infiniment petit. Donc l'aire DAC est la limite de la somme des triangles T′RT.

Cela posé, les deux aires ACB, DAC étant limites de

sommes d'infiniment petits qui sont dans le rapport de 2 : 1, seront elles-mêmes dans ce rapport. Donc ACB est les deux tiers du triangle DBC, ou du parallélogramme construit sur AB et BC; ce qui ramène aux résultats précédemment obtenus.

34. *Généralisation du problème.* — Au lieu de l'équation particulière $y^2 = 2px$, prenons l'équation plus générale $y^n = px^m$, n et m étant des nombres entiers quelconques, positifs ou de signes contraires. Les courbes qu'elle représente seront paraboliques dans le premier cas; dans le second, elles seront des hyperboles ayant les axes de coordonnées pour asymptotes.

1°. La courbe représentée par l'équation $y^n = px^m$, m et n étant positifs, passe par l'origine, et nous nous proposons de mesurer l'aire comprise entre un arc AM (*fig.* 8) et les coordonnées MB, AB de son extrémité M.

Pour cela, nous chercherons le rapport des deux aires AMB, AMC; et, à cet effet, nous comparerons deux parallélogrammes correspondants NP′, NQ′, éléments infiniment petits des sommes dont les limites sont AMB, AMC. En désignant par x, y les coordonnées de N, par h, k leurs accroissements en passant de N en N′, le rapport des deux parallélogrammes sera $\frac{yh}{xk}$, et sa limite sera $\frac{y}{x}$ lim. $\frac{h}{k}$. Pour obtenir la limite de $\frac{h}{k}$, il faut exprimer que les deux points sont sur la courbe, ce qui donne

$$y^n = px^m, \quad (y + k)^n = p(x + h)^m.$$

Développant les puissances, et supprimant les premiers termes des deux membres qui se détruisent, il vient

$$k(ny^{n-1} + \beta) = h(mpx^{m-1} + \alpha),$$

β représentant une somme de termes qui renferment k depuis la première puissance jusqu'à la $(n-1)^{ième}$, et α une somme de termes renfermant h depuis la première puissance jusqu'à la $(m-1)^{ième}$. On tire de cette équation

$$\frac{h}{k} = \frac{ny^{n-1} + \beta}{mpx^{m-1} + \alpha},$$

et, par conséquent,

$$\lim. \frac{h}{k} = \frac{ny^{n-1}}{mpx^{m-1}}.$$

La limite du rapport des deux parallélogrammes est donc

$$\frac{ny^n}{mpx^m} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m}.$$

Donc aussi le rapport des deux aires AMB, AMC est $\frac{n}{m}$; l'aire cherchée AMB est donc au parallélogramme ABMC dans le rapport $\frac{n}{m+n}$; et sa valeur est $\frac{nab \sin A}{m+n}$, si l'on désigne par a, b les coordonnées de M et par A l'angle des axes. Si l'aire, au lieu d'être prise à partir de l'origine, l'était entre deux ordonnées correspondantes aux abscisses a, a', elle aurait évidemment pour expression

$$\frac{n}{m+n}(a'b' - ab)\sin A.$$

2°. Si les deux exposants sont de signes contraires, on peut mettre l'équation sous la forme

$$y^n x^m = p,$$

en supposant m et n positifs.

Les deux parallélogrammes MP', MQ' (*fig.* 9), éléments correspondants des sommes qui ont pour limites les aires NN'BB', NN'CC', ont pour rapport $-\frac{yh}{xk}$, h et

k étant de signes contraires et satisfaisant à l'équation

$$(y+k)^n(x+h)^m = p$$

ou

$$[y^n + (ny^{n-1}+\beta)k][x^m + (mx^{m-1}+\alpha)h] = p,$$

β représentant un ensemble de termes renfermant k à la première puissance ou à des puissances supérieures; et α un ensemble de termes renfermant h à un degré égal ou supérieur à l'unité.

Effectuant le produit et supprimant les termes $y^n x^m$ et p qui se détruisent, il vient

$$(ny^{n-1}+\beta)kx^m + (mx^{m-1}+\alpha)hy^n$$
$$+(ny^{n-1}+\beta)(mx^{m-1}+\alpha)kh = 0.$$

Divisant par k et prenant les limites, on trouve

$$ny^{n-1}x^m + mx^{m-1}y^n \lim. \frac{h}{k} = 0;$$

d'où

$$\lim. \frac{h}{k} = -\frac{nx}{my}.$$

Le rapport des deux rectangles MP′, MQ′ a donc pour limite $\frac{n}{m}$, et, par conséquent, le rapport des aires NN′BB′, NN′CC′ est $\frac{n}{m}$.

Il est facile d'avoir une seconde relation entre ces deux aires.

En effet, la première, ajoutée au parallélogramme AN, forme la même figure que la seconde ajoutée au parallélogramme AN′; donc la différence de ces aires est égale à la différence de ces deux parallélogrammes, ou à $(a'b' - ab)\sin A$, si l'on désigne par a, b et a', b' les

coordonnées des extrémités N, N'. On trouvera ainsi

$$NN'BB' = \frac{n}{n-m}(a'b' - ab)\sin A.$$

35. *Exemple d'une loi particulière pour les bases des parallélogrammes élémentaires.* — Comme les bases infiniment petites des parallélogrammes ne sont assujetties à aucune loi nécessaire, on choisit celle qui semble devoir donner les calculs les plus simples.

Dans un des exemples précédents, nous avons supposé ces bases égales; dans d'autres, nous n'avons eu besoin de supposer aucune dépendance entre elles. Nous allons donner des exemples où la sommation devient très-facile quand on suppose que les abscisses des points de division sont en progression géométrique et que, par suite, leurs différences, ou les bases des parallélogrammes, forment une progression ayant la même raison. Ce procédé est dû à Fermat.

Soit l'équation

$$y = px^m,$$

dans laquelle nous supposerons m quelconque, positif ou négatif; ce qui renferme les paraboles et hyperboles que nous venons de considérer. Cherchons l'aire comprise entre un arc quelconque MM' (*fig.* 10) de la courbe, les deux ordonnées extrêmes MP, M'P' et l'axe des x; et, pour plus de simplicité, supposons les axes rectangulaires. Soient a, b les coordonnées de M; a', b' celles de M'. Partageons PP' en n parties tendant vers zéro, et telles, que les abscisses de tous les points de division forment une progression géométrique

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \ldots, aq^n,$$

on aura

$$a' = aq^n;$$

de sorte que n étant déterminé, q s'ensuivra, et q tendra vers l'unité lorsque n croîtra indéfiniment; de sorte

que la distance de deux points consécutifs tendra vers zéro. L'expression générale de cette distance sera

$$aq^{r+1} - aq^r \quad \text{ou} \quad a(q-1)q^r.$$

Elles formeront donc une progression géométrique ayant pour premier terme $a(q-1)$ et pour raison q.

Or ces distances doivent être multipliées par les ordonnées successives qui seront aussi en progression géométrique, puisqu'elles ont pour expression générale px^m, et que les valeurs de x que l'on considère sont en progression géométrique. Les rectangles élémentaires auront donc pour mesure le produit des termes correspondants de deux progressions, et formeront, par conséquent, une nouvelle progression. On pourra donc avoir l'expression de la somme de ces rectangles, et il ne s'agira plus que de calculer la limite de cette expression.

La base du rectangle dont la première abscisse est aq^r sera $a(q-1)q^r$, sa hauteur $pa^m q^{mr}$ et sa surface $pa^{m+1}(q-1)q^{(m+1)r}$. La somme de ces rectangles sera

$$pa^{m+1}(q-1)[1 + q^{m+1} + q^{2(m+1)} + \ldots + q^{(n-1)(m+1)}],$$

ou, en sommant cette progression géométrique dont la raison est q^{m+1},

$$pa^{m+1}(q-1)\frac{[q^{(m+1)n}-1]}{q^{m+1}-1},$$

ou, à cause de $aq^n = a'$,

$$p(a'^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \frac{q-1}{q^{m+1}-1};$$

il ne reste donc plus qu'à trouver la limite du rapport $\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$, lorsque q tend vers l'unité; ce qui n'offre aucune difficulté. Nous distinguerons deux cas, suivant que $m+1$ sera positif ou négatif.

1°. Soit d'abord $m+1$ positif et représenté par le rapport de deux entiers quelconques $\frac{r}{s}$, il s'agit de

trouver la limite de $\frac{q-1}{q^{\frac{r}{s}}-1}$, quand q tend vers 1, ou, en posant $q^{\frac{1}{s}}=t$, celle de $\frac{t^s-1}{t^r-1}$, quand t tend lui-même vers l'unité. Remplaçant t par $1+\alpha$, α tendra vers zéro, et le rapport précédent devient

$$\frac{s\alpha+\frac{s(s-1)}{1.2}\alpha^2+\ldots+\alpha^s}{r\alpha+\frac{r(r-1)}{1.2}\alpha^2+\ldots\alpha^r}.$$

Divisant par α les deux termes, et faisant $\alpha=0$, on aura la limite de la fraction, qui sera

$$\frac{s}{r} \text{ ou } \frac{1}{m+1}.$$

Donc l'aire cherchée sera

$$\frac{p(a'^{m+1}-a^{m+1})}{m+1} \text{ ou } \frac{a'b'-ab}{m+1}.$$

2°. Soit maintenant $m+1=-\frac{r}{s}$, il faudra trouver la limite de $\frac{q-1}{q^{-\frac{r}{s}}-1}$ ou de $-q^{\frac{r}{s}}\frac{(q-1)}{q^{\frac{r}{s}}-1}$.

Or $q^{\frac{r}{s}}$ a pour limite 1, et, d'après le calcul précédent, le second facteur a pour limite $\frac{s}{r}$ ou $-\frac{1}{m+1}$.

La limite de la fraction en question est donc $\frac{1}{m+1}$ et l'aire aura encore pour expression

$$\frac{p(a'^{m+1}-a^{m+1})}{m+1} \text{ ou } \frac{a'b'-ab}{m+1}.$$

Remarque. — L'aire dont nous venons de trouver l'expression étant la limite de la somme des rectangles ayant pour mesure yh ou $px^m h$, h désignant la différence infiniment petite de deux valeurs successives de x, suivant une loi arbitraire, il s'ensuit que la limite de la somme $\Sigma x^m h$, lorsque x passe de la valeur a à la valeur a' par degrés infiniment petits quelconques h, a pour valeur, quel que soit m,

$$\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Si l'on fait $a = 0$ et que $m + 1$ soit positif, cette expression se réduit à

$$\frac{a'^{m+1}}{m+1}.$$

36. Cette formule s'applique à toutes les valeurs positives ou négatives de m, excepté la valeur particulière -1, qui lui donnerait la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile de trouver la formule qui correspond à ce cas, en cherchant la limite vers laquelle tend l'expression $\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, lorsque l'on fait tendre m vers -1.

Divisant par a^{m+1}, dont la limite est l'unité, et remplaçant $m + 1$ par u, il s'agit de trouver la limite de l'expression

$$\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^u - 1}{u}$$

quand u tend vers zéro.

Posons $\left(\frac{a'}{a}\right)^u = 1 + \alpha$, α tendra vers zéro, et l'expression précédente devient $\frac{\alpha}{u}$, dont on éliminera u au moyen de l'équation qu'on vient de poser, en introduisant la nouvelle variable α. On en tire, en prenant les loga-

rithmes,

$$u \log \frac{a'}{a} = \log(1+\alpha), \quad \text{d'où} \quad u = \frac{\log(1+\alpha)}{\log \frac{a'}{a}},$$

et il reste à trouver la limite de $\frac{\alpha \log \frac{a'}{a}}{\log(1+\alpha)}$ ou celle de $\frac{\alpha}{\log(1+\alpha)}$ qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Mais on a vu dans l'*Algèbre* (*voir* Note Ire) que lorsque α tend vers zéro, suivant une loi quelconque, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers une limite déterminée, que l'on désigne ordinairement par la lettre e, et qui n'est autre chose que la base du système de Néper, dont la valeur incommensurable est

$$e = 2,7182818\ldots.$$

La limite de $\frac{\left(\frac{a'}{a}\right)^u - 1}{u}$ est donc $\frac{\log \frac{a'}{a}}{\log e}$, et l'expression $p\,\frac{a'^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ a pour limite

$$\frac{p \log \frac{a'}{a}}{\log e}.$$

Telle est l'expression de l'aire comprise entre deux ordonnées de la courbe dont l'équation est

$$xy = p,$$

et qui n'est autre que l'hyperbole du second degré rapportée à ses asymptotes.

Elle est équilatère, puisque nous avons supposé les axes rectangulaires; mais il aurait suffi d'introduire le facteur sin A pour avoir le cas général.

37. *Aire de la cycloïde.* — On appelle cycloïde l

courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sur une droite donnée. Soient TMU (*fig.* 11) une position quelconque du cercle qui roule sur la droite AB; M le point qui décrit la courbe; A la position où le point M est sur la droite fixe; l'arc MT sera égal à AT, d'après le sens qu'on attache au roulement. Si B est la position où M revient sur la droite fixe, on aura $AB = 2\pi a$, a étant le rayon du cercle décrivant, et quand le point de contact T vient au milieu C de AB, le point M se trouve à l'extrémité D du diamètre CD perpendiculaire à AB. Ce point D est le sommet de la cycloïde, et CD en est l'axe.

Cela posé, on demande la mesure de l'aire ABD comprise entre la courbe entière et sa base.

Cette question sera résolue si l'on détermine le complément de cette aire au rectangle ABA'B' qui est égal à $4\pi a^2$, ou à quatre fois l'aire du cercle générateur. C'est ce complément que nous allons chercher, et nous le regarderons comme limite de la somme des rectangles compris entre les perpendiculaires successives abaissées des points de la courbe sur A'B'.

Soient M, M' deux points infiniment voisins pris sur la cycloïde; MK, M'K' perpendiculaires à AB; MR, M'R' des parallèles à AB qui rencontrent en N, N' le cercle décrit sur CD comme diamètre. Comparons les deux rectangles MK', NR'; leur rapport est

$$\frac{MK \cdot MH}{NR \cdot M'H} \quad \text{ou} \quad \frac{QU}{MQ} \cdot \frac{MH}{M'H},$$

et sa limite est égale au produit de $\frac{UQ}{MQ}$ par la limite du rapport $\frac{MH}{M'H}$. Or nous allons montrer que cette dernière est précisément $\frac{MQ}{UQ}$, d'où résultera que la limite du rapport des deux rectangles MK', NR' est l'unité; ce qui ramènera l'aire cherchée à celle du cercle CD.

En effet, le cercle mobile viendra dans la position qui amène le point M dans une position quelconque, en le faisant d'abord tourner autour de son centre immobile, ce qui amènera d'abord M en une position I; puis transportant le système parallèlement à AB, d'une quantité égale à l'arc MI, ce qui amènera le point de contact T en T', et le point décrivant en M', en prenant $TT' = MI = IM'$, et l'on sait que cet arc MI diffère de sa corde d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, puisqu'on a démontré dans la Trigonométrie que le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde, ou à son sinus, ou à sa tangente, a pour limite l'unité.

En nommant α l'angle de la corde MI avec MH, on aura

$$MH = \text{corde } MI . \cos\alpha + MI,$$
$$M'H = \text{corde } MI . \sin\alpha;$$

donc

$$\frac{MH}{M'H} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{MI}{\text{corde } MI . \sin\alpha}.$$

Passant aux limites, et observant que $\frac{MI}{\text{corde } MI}$ a pour limite 1, et que l'angle α a pour limite l'angle M que fait MH avec la tangente au cercle en M, on aura

$$\lim. \frac{MH}{M'H} = \frac{\cos M}{\sin M} + \frac{1}{\sin M} = \frac{1 + \cos M}{\sin M} = \cot\frac{1}{2} M$$
$$= \text{tang} QUM = \frac{MQ}{UQ},$$

comme nous l'avions annoncé.

Ainsi l'aire AA'D sera égale à celle du demi-cercle CND, puisqu'elles sont les limites de sommes de rectangles tels, que la limite du rapport de deux correspondants quelconques est l'unité. La somme des deux aires AA'D, DBB' est donc égale à celle du cercle générateur, et, par conséquent, l'aire ADB est égale à trois fois celle de ce même cercle.

Si l'on ne voulait mesurer qu'une portion de l'aire

AA'D, on voit qu'elle serait équivalente à la portion correspondante du demi-cercle CD.

38. Descartes a donné plusieurs démonstrations très-élégantes de cette proposition. Nous nous bornerons à en rapporter une.

Soient C (*fig.* 12) le milieu de la base de la cycloïde, A une de ses extrémités, CD le diamètre du cercle générateur, O son centre; le triangle ADC sera équivalent au cercle générateur. Pour évaluer le segment ASD, soient deux points quelconques T, T' équidistants de A et C; M, M' les points de la courbe correspondants aux points de contact T, T' du cercle générateur avec la base, on aura, d'après l'égalité des arcs de cercle MT, M'T,,

$$HT = H'T_{,} = DP', \quad IH = I'H';$$

donc

$$MI + M'I' = MH + M'H' = NN'.$$

La somme des deux cordes MI, M'I' du segment ASD, équidistantes de la parallèle LOL' à la base, étant égale à la corde NN', il s'ensuit que, si l'on partage AC en parties infiniment petites par des couples de points dans les mêmes conditions que T, T', le segment ASD pourra être considéré comme limite de la somme de rectangles ayant pour bases les différentes cordes telles que MI, M'I', et pour hauteur les distances de deux consécutives, et la somme de deux rectangles quelconques équidistants de la droite LL' sera égale au rectangle du cercle O, compris entre NN' et la corde infiniment voisine correspondante à celle qui suit MI. Or la somme de ces derniers rectangles a pour limite le demi-cercle LCL'; donc le segment ASD est équivalent au demi-cercle générateur, et l'aire de la demi-cycloïde vaut une fois et demie celle de ce cercle. Donc l'aire de la cycloïde est triple de celle du cercle générateur.

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

COMMENT LES VOLUMES DES CORPS PEUVENT ÊTRE CONSIDÉRÉS COMME LIMITES DE SOMMES D'INFINIMENT PETITS.

39. *Solides de révolution.* — Supposons une surface plane quelconque tournant autour d'un axe AX (*fig.* 13) situé dans son plan, et proposons-nous de calculer la portion du volume engendré, qui sera comprise entre deux plans quelconques perpendiculaires à AX. Ces plans peuvent être considérés comme engendrés par des ordonnées MP, NQ; les deux surfaces courbes qui terminent le volume à mesurer sont engendrées par des arcs de courbes données MN, M'N', et ce volume est la différence de deux autres engendrés respectivement par les quadrilatères MNPQ, M'N'PQ. Bornons-nous donc au calcul d'un quelconque de ces derniers, par exemple celui qu'engendre MNPQ.

Décomposons ce volume au moyen d'une suite de plans perpendiculaires à l'axe, infiniment voisins les uns des autres; et substituons à ces éléments, dont la somme est constamment égale à ce volume même, d'autres éléments d'une espèce plus simple et tels, que le rapport de chacun d'eux à son correspondant ait pour limite l'unité. La limite de la somme de ces nouveaux éléments indéfiniment décroissants sera, d'après le principe fondamental, la valeur exacte du volume à mesurer. Soient R, R' deux points quelconques de MN, correspondants à deux plans sécants consécutifs, S, S' leurs projections sur AX; on peut sup-

poser SS′ assez petit pour que les ordonnées varient dans un même sens, en passant de R à R′; d'où il suit que les deux rectangles RSS′I et R′S′SI′ engendreront autour de AX des cylindres dont l'un sera plus petit et l'autre plus grand que la partie du solide proposé, comprise entre les deux plans sécants. Or le rapport de ces deux cylindres de même hauteur est égal à celui de leurs bases ou des carrés de leurs rayons RS, R′S′; et à mesure que S′ se rapproche de S, le rapport des ordonnées RS, R′S′ se rapproche de l'unité, ainsi que celui de leurs carrés. Donc la limite du rapport des deux cylindres est l'unité; et il en est de même à plus forte raison pour le rapport d'un quelconque de ces cylindres au volume intermédiaire qui est l'élément exact du volume cherché.

Donc le volume engendré par MNPQ est la limite d'une somme de cylindres ayant pour hauteurs les parties infiniment petites dans lesquelles on décompose PQ, et pour rayons de leurs bases, les ordonnées de MN correspondantes aux points de division de PQ.

Ces cylindres pourront être pris tantôt intérieurs, tantôt en partie extérieurs, sans que la limite de la somme soit changée, puisqu'ils satisfont toujours à la condition unique qu'ils doivent remplir.

Si l'aire génératrice n'est pas terminée à l'axe AX, mais à une seconde courbe M′N′, le volume engendré sera la différence de deux autres qui rentrent dans le premier cas. On pourra aussi le considérer comme la limite de la différence des deux sommes de cylindres, ou de la somme des différences des cylindres élémentaires correspondants. Cette proposition générale s'exprime par la formule suivante dans laquelle V désigne le volume, et Y, y les ordonnées des deux courbes pour une même abscisse x,

$$V = \pi \lim. \sum (Y^2 - y^2) h.$$

40. *Solides terminés par des surfaces quelconques.* — On concevra encore un système de plans parallèles, à des distances infiniment petites les unes des autres, et tels, que le solide entier que l'on veut mesurer soit compris entre le premier et le dernier; puis on cherchera à substituer à la partie comprise entre deux plans consécutifs quelconques un solide d'espèce plus simple et qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle. Or, s'il arrive qu'en menant par tous les points du contour d'une des deux sections, des parallèles à une même direction jusqu'au plan de l'autre, la projection ainsi effectuée de la première courbe soit tout entière comprise dans la seconde, le cylindre ainsi formé sera tout entier compris dans la tranche du solide située entre les deux plans. Au contraire, le cylindre formé par des parallèles à la même direction menée du contour de la seconde section au premier plan, renfermera entièrement cette même tranche. Mais le rapport des deux cylindres de même hauteur est égal à celui de leurs bases, lequel tend indéfiniment vers l'unité à mesure que la distance des deux plans tend vers zéro. Donc le rapport des deux cylindres, et, par suite, de la tranche du solide à l'un quelconque d'entre eux, a pour limite l'unité, ou, en d'autres termes, chacun de ces cylindres diffère de l'élément exact du solide, d'une quantité infiniment petite par rapport à cet élément. Donc enfin le volume proposé est limite d'une somme de cylindres ayant pour bases les sections du solide par des plans parallèles infiniment voisins, et pour hauteurs les distances de ces plans.

Ce premier cas est celui de tous les corps auxquels Archimède a appliqué ce procédé dont on lui est redevable.

41. Mais il peut arriver que les parallèles menées par

les points d'une des sections ne soient pas toutes intérieures ou toutes extérieures à la tranche du solide, et alors le raisonnement précédent ne suffirait pas. Dans ce cas, on concevra un second système de plans parallèles à une seconde direction, qui décomposeront une quelconque des premières tranches en solides infiniment petits dans deux sens, comprises entre quatre plans parallèles deux à deux et infiniment voisins. Jusqu'ici on n'a pas altéré les éléments du solide; mais ces filets infiniment étroits sont encore terminés à la surface du solide et ne seraient pas plus faciles à évaluer que ce solide entier. Or, en en retranchant ou en y ajoutant des parties infiniment petites par rapport à eux-mêmes, on peut les réduire à des parallélipipèdes. Il suffit pour cela de mener des plans parallèles à une troisième direction, et passant par les extrémités d'une des cordes ou par des points qui en soient infiniment voisins. On aura ainsi des parallélipipèdes, l'un plus petit, l'autre plus grand que le filet du solide, et dont le rapport tendra indéfiniment vers l'unité. On pourra donc substituer à ce filet l'un ou l'autre, ou tout autre parallélipipède dont l'arête finie différerait infiniment peu des leurs; par exemple, et c'est ce qui sera le plus simple, on pourra prendre pour arêtes les cordes mêmes de la section du solide par les premiers plans. Ainsi le rapport de chacun de ces parallélipipèdes au filet correspondant, étant aussi près de l'unité qu'on le voudra, il en sera de même du rapport de leur somme à la tranche du solide. Or ces parallélipipèdes sont dans les mêmes conditions, relativement à la tranche du cylindre qui aurait pour base la même section du solide, et ses arêtes dans une direction arbitraire; et, par conséquent, le rapport de cette tranche à celle du solide a pour limite l'unité. On peut donc énoncer dans tous les cas cette proposition :

Tout solide peut être considéré comme la limite de la somme de cylindres ayant pour bases les sections par des plans parallèles infiniment voisins, et pour hauteurs les distances successives de ces plans.

Ce mode de décomposition est surtout employé lorsque l'équation de la surface est donnée en coordonnées rectilignes; alors les directions que l'on choisit pour les plans sécants sont celles des plans coordonnés.

Lorsque l'on a trouvé l'expression de l'aire de la section du corps par un plan quelconque, parallèle par exemple au plan des y et z, le produit de cette aire par la distance au plan infiniment voisin est la mesure du parallélogramme dont un côté serait exprimé par le même nombre que l'aire, et serait à une distance du côté parallèle égale à celle des deux plans; d'où l'on voit que la mesure du volume est ramenée à celle de l'aire d'une courbe dont l'ordonnée serait exprimée par la fonction de x qui représente l'aire de la section du corps.

Si la surface était donnée par une équation entre des coordonnées polaires, le mode de décomposition serait différent. Nous aurons occasion de nous en occuper plus tard, et nous nous bornons ici à cette simple indication.

Les éléments que nous avons considérés ne sont infiniment petits que dans un seul sens, ou deux au plus. Dans un grand nombre de questions qui ne sont pas purement géométriques, il est nécessaire de décomposer les volumes en éléments infiniment petits dans tous les sens. Dans ce cas, on décomposera les filets infiniment petits dont il a été question ci-dessus, par une série de plans infiniment voisins et parallèles au troisième plan coordonné.

CHAPITRE X.

APPLICATION A LA MESURE DE QUELQUES VOLUMES.

Solides de révolution.

42. *Paraboloïde de révolution.* — Une parabole tournant autour de son axe AX (*fig.* 14), on demande le volume engendré par l'aire comprise entre un arc quelconque AB, l'ordonnée BC et l'axe AC.

Soient a, b les coordonnées de B, et $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole; partageons AC en un nombre n indéfiniment croissant de parties égales α. Le volume cherché sera la limite d'une somme de cylindres ayant pour hauteur α, et pour bases les cercles ayant pour rayons les différentes ordonnées MP de la parabole menées par tous les points de division de AC. L'expression générale du volume d'un de ces cylindres est $\pi y^2 \alpha$ ou $2\pi p x \alpha$; leur somme $2p\Sigma x\alpha$ a pour limite $2p\pi\frac{x^2}{2}$ ou $p\pi a^2$. (Voir n° 35.)

On peut donc dire que ce volume est égal à celui d'un cylindre qui aurait pour base le cercle dont le rayon est AC, et pour hauteur le demi-paramètre. On peut encore donner une autre forme à l'expression précédente, en y remplaçant pa par son égal $\frac{b^2}{2}$, elle devient $\frac{\pi b^2 a}{2}$, et est égale à la moitié de la mesure du cylindre qui aurait BC pour base et AC pour hauteur, ou à trois fois la moitié du cône qui aurait même base et même hauteur. C'est sous cette dernière forme qu'Archimède a présenté cette proposition.

43. *Segment d'ellipse tournant autour de sa corde.* — Soient une ellipse ayant pour équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

D'D (*fig.* 15) une corde parallèle à l'axe B'B, $2l$ sa longueur, d sa distance AE au centre, et A l'aire du segment DCD' qui tourne autour de sa corde fixe DD' ; proposons-nous de mesurer le volume engendré V. Nous le considérerons comme limite de la somme des cylindres qui auraient pour hauteurs les subdivisions infiniment petites égales de D'D, et pour bases les cercles ayant pour hauteurs les perpendiculaires MQ abaissées sur DD' par les différents points de l'arc D D', qui correspondent aux points de division de DD'. Soient n le nombre des points de division de DE et α leur distance; la mesure d'un quelconque des cylindres infiniment petits sera

$$\pi(y-d)^2\alpha \quad \text{ou} \quad \pi(y^2-2dy+d^2)\alpha,$$

et leur somme peut se décomposer comme il suit,

$$\pi\Sigma(y^2+d^2)\alpha - 2\pi d\Sigma y\alpha,$$

ou, remplaçant y^2 par $b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$,

$$\pi(b^2+d^2)\Sigma\alpha - \frac{\pi b^2}{a^2}\Sigma x^2\alpha - 2\pi d\Sigma y\alpha).$$

Or

$$\Sigma\alpha = 2l, \quad \lim.\Sigma y\alpha = A;$$

et, d'après la remarque du n° 35,

$$\lim.\Sigma x^2\alpha = \frac{2l^3}{3}.$$

On aura donc

$$V = 2\pi l(b^2+d^2) - 2\pi dA - \frac{2\pi b^2 l^3}{3a^2}.$$

On aurait le volume de l'ellipsoïde tout entier en faisant $d = 0$, $l = a$, et l'on trouverait ainsi

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2;$$

et si $b = a$, on a $\frac{4}{3}\pi a^3$ pour la mesure du volume de la sphère dont le rayon est a.

44. *Volume du tore.* — On appelle *tore* le solide engendré par un cercle qui tourne autour d'une droite extérieure, située dans son plan.

Soient O (*fig.* 16) le centre du cercle générateur, R son rayon, $AO = a$; l'équation du cercle sera

$$y^2 + (x - a)^2 = R^2,$$

et le volume est la limite de la somme des volumes engendrés par les rectangles MNIK, qui sont les différences des cylindres infiniment petits engendrés par les rectangles QI, QK. L'expression générale de cette différence est

$$\pi\left(\overline{QN}^2 - \overline{QM}^2\right) MI = \pi(QN + QM)(QN - QM)MI$$
$$= 2\pi a . MN . MI = 2\pi a . MIKN.$$

Or la limite de la somme des rectangles MIKN est l'aire du cercle. Donc *le volume du tore est égal à la surface du cercle générateur multipliée par la circonférence décrite par son centre.*

45. *Ellipsoïde de révolution.* — Supposons qu'une ellipse tourne autour de son axe $AB = 2a$ (*fig.* 17), et proposons-nous de calculer le volume du segment détaché par un plan perpendiculaire à cet axe, mené à une distance $AD = d$ du sommet A.

Soit l'équation de l'ellipse rapportée au sommet A

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

le volume sera la limite de

$$\pi \Sigma y^2 \alpha = \pi \frac{b^2}{a^2} \Sigma (2ax - x^2) \alpha.$$

Soit n le nombre des points de divisio de AD, on aura

$$N\alpha = d;$$

on retombe ainsi dans des calculs qui se sont déjà plusieurs fois présentés, et l'on trouvera (n° 35)

$$\lim. \Sigma x \alpha = \frac{d^2}{2}, \quad \lim. \Sigma x^2 \alpha = \frac{d^3}{3},$$

d'où

$$\lim. \Sigma (2ax - x^2) \alpha = ad^2 - \frac{d^3}{3} = d^2 \frac{(3a - d)}{3}.$$

On aura donc pour expression du volume cherché V,

$$V = \frac{\pi b^2 d^2}{3a^2} (3a - d).$$

Ce résultat coïncide avec celui d'Archimède. En effet, il énonce la proposition de la manière suivante :

Le segment de l'ellipsoïde est au cône de même base et même hauteur, comme le demi-axe de l'ellipsoïde ajouté à la hauteur du segment complémentaire à l'ellipsoïde est à la hauteur de ce dernier.

Or on aperçoit facilement que les deux formules sont identiques.

46. *Hyperboloïde de révolution.* — Soit l'équation d'une hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + 2ax)$ rapportée à son sommet A (*fig.* 18). Supposons qu'elle tourne autour de son axe transverse, et proposons-nous de calculer le volume V détaché par un plan perpendiculaire à l'axe

mené à une distance $AD = d$. Il est la limite de $\Sigma \pi y^2 \alpha$ ou de $\frac{\pi b^2}{a^2} \Sigma (x^2 + 2ax) \alpha$.

Or on a, d'après le n° 35 déjà cité plusieurs fois,

$$\lim. \Sigma x \alpha = \frac{d^2}{2}, \quad \lim. \Sigma x^2 \alpha = \frac{d^3}{3}.$$

Donc

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(ad^2 + \frac{d^3}{3} \right) = \frac{\pi b^2 d^2}{3a^2} (3a + d).$$

Archimède, dans la solution qu'il a donnée de ce problème, cherche le rapport du segment de l'hyperboloïde au cône de même base et même hauteur, et parvient à la formule suivante, qui donne le même résultat :

Le volume du segment est à celui du cône de même base et même hauteur, comme la hauteur du segment, plus trois fois le demi-axe transverse, est à cette même hauteur augmentée de l'axe transverse.

47. *Remarque.* — Si une surface dont l'aire est A tourne successivement autour de deux axes fixes parallèles U, V (*fig.* 19), situés dans son plan, les volumes engendrés auront pour différence le produit de l'aire A par la circonférence dont le rayon est la distance d des deux axes.

En effet, soit une perpendiculaire quelconque QPMM′ aux axes, qui coupe ceux-ci en Q, P, et la courbe en M, M′. Soient $MP = x$, $M'P = x'$, $MQ = X$, $M'Q = X'$; α la distance de QM′ à la parallèle infiniment voisine.

Les volumes engendrés autour des deux axes sont les limites des deux sommes suivantes :

$$\pi \Sigma (x'^2 - x^2) \alpha, \quad \pi \Sigma (X'^2 - X^2) \alpha,$$

et comme on a

$$X = x + d, \quad X' = x' + d,$$

il s'ensuit

$$X'^2 - X^2 = x'^2 - x^2 + 2d(x' - x);$$

donc la différeuce des deux sommes est $2\pi d\Sigma(x' - x)\alpha$ ou $2\pi d\Sigma MM'.\alpha$.

Mais $\Sigma MM'.\alpha$ a pour limite l'aire A; donc la limite de la différence des deux sommes, ou la différence de leurs limites, et, par conséquent, des volumes engendrés, est $2\pi dA$, comme nous l'avions annoncé.

48. *Volumes engendrés par des paraboles ou hyperboles d'ordres quelconques.* — Considérons le volume engendré par la révolution autour de l'axe des x, d'une courbe représentée par l'équation $y = px^m$, dans laquelle on suppose m quelconque en valeur et en signe, et qui peut, par conséquent, représenter des paraboles ou hyperboles de tous les ordres.

Le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe x et correspondants aux abscisses a, a' sera la limite de $\Sigma\pi y^2\alpha$, α représentant une quelconque des subdivisions infiniment petites de l'intervalle $a' - a$. En substituant à y sa valeur en x, il faudra trouver

$$\pi p^2 \lim. \Sigma x^{2m}\alpha.$$

Or, d'après la remarque générale du n° 35, on a, entre les limites a, a',

$$\lim. \Sigma x^{2m}\alpha = \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{2m+1}.$$

Le volume cherché a donc pour mesure

$$\pi p^2 \frac{(a'^{2m+1} - a^{2m+1})}{2m+1} = \frac{\pi b'^2 a' - \pi b^2 a}{2m+1}.$$

On l'obtient donc en divisant par $2m+1$ la différence des deux cylindres ayant pour bases les deux bases mêmes du solide à évaluer, et pour hauteurs les abscisses correspondantes.

Solides non de révolution.

49. *Segment d'ellipsoïde.* — Rapportons la surface à des axes parallèles à un système de diamètres conjugués dont l'un passe par le centre de la base du segment. Prenons ce dernier pour axe des x, et pour origine l'extrémité qui appartient au segment. L'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2ax-x^2}{a^2}.$$

Soit AD $= d$ (*fig.* 20) l'abscisse du plan de la base du segment qui est parallèle au plan YZ. Nous considérerons le volume du segment comme limite de la somme de cylindres ayant pour bases des sections parallèles à YZ et pour hauteurs les distances infiniment petites de ces plans successifs. Une quelconque de ces hauteurs s'obtiendra en multipliant la partie α correspondante de l'axe AX par le sinus de l'angle θ que ce diamètre AX de l'ellipsoïde fait avec le plan COB des deux autres conjugués. L'aire de la section MPN correspondante à un x quelconque AP sera $\pi.\mathrm{MP}.\mathrm{PN}\sin\varphi$, φ étant l'angle des diamètres OB, OC. En remplaçant MP, NP par leurs valeurs en x, on trouvera pour expression d'un quelconque des cylindres élémentaires,

$$\frac{\pi bc}{a^2}\sin\theta\sin\varphi.(2ax-x^2)\,\alpha.$$

Le volume cherché V peut donc être représenté comme il suit :

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\sin\theta\sin\varphi.\lim.\sum(2ax-x^2)\,\alpha,$$

lorsque x passe de o à d par degrés, égaux ou inégaux, mais infiniment petits, représentés par α.

On aura encore, comme précédemment, d'après le n° 35,

$$\sum(2ax-x^2)\,\alpha=\frac{d^2(3a-d)}{3}.$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad V = \frac{\pi bcd^2(3a - d)}{3a^2} \sin\theta \sin\varphi.$$

Si l'on suppose $d = 2a$, on aura pour expression du volume entier de l'ellipsoïde,

$$\frac{4}{3}\pi abc \sin\theta \sin\varphi,$$

ce qui peut être traduit de différentes manières, en observant que $abc \sin\theta \sin\varphi$ mesure le volume du parallélipipède construit sur les trois demi-diamètres conjugués, et que $\pi bc \sin\varphi . 2a \sin\theta$ mesure le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, ayant les arêtes parallèles à AX, et ses bases parallèles à YZ. Une des conséquences de l'expression précédente est que ce parallélipipède et ce cylindre ont leurs volumes constants, quel que soit le système des diamètres conjugués.

L'expression (1) comparée à celle du volume du cône ayant même base que le segment, et son sommet en A, donne un énoncé semblable à celui qu'Archimède a fait connaître dans le cas de l'ellipsoïde de révolution.

On trouverait des résultats analogues aux précédents pour les hyperboloïdes et paraboloïdes quelconques; nous ne croyons pas utile de nous y arrêter.

50. *Onglet cylindrique.* — Considérons un cylindre droit dont la base soit le cercle ABC (*fig.* 21); par un de ses diamètres AB, menons un plan quelconque qui coupe la surface du cylindre suivant l'ellipse ABD, et proposons-nous de calculer le volume de l'onglet compris entre ABD et ACB.

Supposons le rayon OC perpendiculaire à AB; D le point de rencontre du plan sécant et de l'arête menée en C; soient $OC = R$, $CD = h$.

Suivant la méthode générale, nous regarderons le volume comme limite d'une somme de cylindres ayant pour bases un système de sections parallèles, et nous prendrons ces plans perpendiculaires à AB.

Soit MPQ un quelconque de ces plans; faisons $AP = x$, $PQ = y$, on aura

$$y^2 = 2Rx - x^2 \quad \text{et} \quad MQ : y :: CD : OC,$$

d'où

$$MQ = \frac{hy}{R}.$$

La section MQP a donc pour mesure

$$\frac{hy^2}{2R}, \quad \text{ou} \quad \frac{h}{2R}(2Rx - x^2).$$

Si donc nous désignons par α la distance infiniment petite du plan de cette section au suivant, le volume cherché V aura pour mesure

$$V = \frac{h}{2R} \lim. \Sigma (2Rx - x^2)\alpha = \frac{2hR^2}{3},$$

et comme $2R^2$ est le rectangle circonscrit à la base ABC de l'onglet, le volume de ce dernier est égal à celui de la pyramide qui aurait ce rectangle pour base et son sommet en D.

CHAPITRE XI.

APPLICATIONS MÉCANIQUES. DÉTERMINATION DES CENTRES DE GRAVITÉ.

51. Nous admettons comme connue la théorie des centres de gravité enseignée dans les cours les plus élémentaires de Statique, et nous nous proposons de la prendre comme un nouvel exemple de l'avantage des méthodes précédentes.

La proposition dont l'application est la plus générale dans la théorie des forces parallèles et qui découle naturellement du principe du levier, est ce qu'on nomme le *théorème des moments*. On appelle *moment* d'une force par rapport à un plan, le produit de cette force par la distance de son point d'application à ce plan. Cela posé, si l'on conçoit un système quelconque de forces parallèles, que l'on considère comme positives celles dont les directions sont dans l'un des sens, et comme négatives celles qui sont dans l'autre, et qu'il en soit de même pour les perpendiculaires abaissées sur un plan choisi arbitrairement, et dont le signe dépendra du côté où elles se trouveront par rapport au plan, le théorème des moments consiste, comme on le sait, en ce que le moment de la résultante des forces parallèles par rapport au plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes. Il résulte de là que les coordonnées rectilignes du point d'application de la résultante s'obtiendront en divisant par la résultante la somme des moments des forces par rapport aux trois plans coordonnés. Ce point d'applica

tion de la résultante, que l'on nomme le centre des forces parallèles, devient le centre de gravité quand ces forces sont des poids; et l'on voit aussi comment le théorème des moments peut être employé à la détermination des centres de gravité.

Nous allons faire voir comment les considérations infinitésimales s'appliquent aux surfaces planes et aux solides continus, et nous en donnerons quelques exemples pour bien faire comprendre les généralités.

Centres de gravité des aires planes.

52. Considérons une figure plane terminée par des droites ou des courbes quelconques, et supposons que des portions quelconques de cette figure aient des poids proportionnels à leurs aires respectives. Admettons ce principe établi dans la statique, que toute partie terminée par un contour convexe, c'est-à-dire qui n'a pas trois points en ligne droite, a son centre de gravité dans son intérieur. Admettons encore que le centre de gravité d'un parallélogramme est le point de rencontre de ses diagonales. Avec ces données, la recherche du centre de gravité d'une surface plane quelconque se ramène aux méthodes exposées précédemment

En effet, prenons deux axes de coordonnées x, y dans le plan de la surface. Le centre de gravité étant le point d'application de la résultante de toutes les forces appliquées à tous les points de la surface proportionnellement aux aires, si l'on décompose la surface en un nombre quelconque de parties, et que l'on considère en tous les centres de gravité de ces parties, des forces parallèles, représentées par leurs aires respectives, et dont la résultante sera représentée par l'aire totale et appliquée au centre de gravité cherché; cette aire totale multipliée par

l'abscisse de son centre de gravité, sera égale à la somme des aires partielles multipliées par les abscisses de leurs centres de gravité. Si les axes ne sont pas rectangulaires, ces produits ne sont pas les moments eux-mêmes, mais proportionnels aux moments, ce qui suffit pour l'exactitude de l'équation. Mais comme il ne serait pas plus facile de trouver les centres de gravité de toutes les parties que de la surface entière, on supposera ces parties infiniment petites; leurs moments le seront, par suite, et par conséquent on pourra leur substituer d'autres infiniment petits, plus simples, assujettis à la seule condition que leurs rapports aient respectivement pour limite l'unité. Mais alors ce sera seulement la limite de leur somme qui sera égale au moment de la résultante et qui, par conséquent, divisée par l'aire de la figure donnée, fera connaître l'abscisse du centre de gravité.

Le mode de décomposition qui se présente de lui-même pour déterminer cette abscisse consiste dans un système de parallèles à l'axe des y, infiniment voisines les unes des autres. Le segment compris entre deux parallèles consécutives peut toujours être considéré comme ayant son contour convexe, puisque ses deux bases sont aussi voisines qu'on voudra; son centre de gravité sera donc entre ces deux droites, et son abscisse différera d'une quantité infiniment petite des abscisses de chacune d'elles; on peut donc substituer au moment de ce segment le produit de son aire par l'abscisse de l'une ou de l'autre de ces deux parallèles à l'axe des y; car le rapport de ce produit au moment véritable a pour limite l'unité, quand la distance de ces parallèles tend vers zéro. Et, par la même raison, on pourra, dans ce produit, substituer à l'aire du segment celle du parallélogramme ayant l'une des cordes parallèles pour base et sa distance à l'autre pour hauteur.

Donc, si l'on désigne par Y et y les ordonnées des deux points extrêmes de la corde qui correspond à l'abscisse quelconque x; par α la partie de l'axe des x interceptée entre deux cordes consécutives ; par A l'aire de la figure, et par x_1, y_1 les coordonnées inconnues du centre de gravité, on aura, en supposant, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires,

$$A x_1 = \lim. \sum (Y - y) x \alpha,$$

d'où l'on tirera x_1, si l'on peut déterminer la limite de cette somme, ainsi que A.

On aurait y_1 par un procédé analogue, en décomposant la figure au moyen d'un système de parallèles à l'axe des x. Mais on peut aussi conserver le premier mode, en remarquant que le centre de gravité d'un des éléments ne peut être qu'à une distance infiniment petite de celui du rectangle inscrit ou circonscrit, et que, par conséquent, on peut substituer au moment exact de cet élément le produit de l'aire du rectangle par $\frac{(Y + y)}{2}$, qui est l'ordonnée du centre de ce rectangle. On aura ainsi

$$A y_1 = \lim. \sum \frac{(Y^2 - y^2)}{2} \alpha,$$

et si l'on peut trouver cette limite, y_1 sera déterminé.

53. Cette formule donne lieu à une remarque curieuse. Si l'on multiplie ses deux membres par 2π, il vient

$$2\pi y_1 A = \lim. \pi \sum (Y^2 - y^2) \alpha.$$

Or le second membre représente le volume engendré par l'aire en question, tournant autour de l'axe des x. *Le volume engendré est donc égal à l'aire de la figure génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Ce théorème porte le nom de Guldin, quoiqu'il se trouve clairement énoncé dans les ouvrages de Pappus, géomètre de l'école d'Alexandrie.

Nous allons donner quelques exemples de ces formules.

54. *Parabole du second ordre.* — Soit l'équation $y^2 = 2px$ et cherchons le centre de gravité du segment CAC′ (*fig.* 22) terminé à la perpendiculaire à l'axe, correspondante à l'abscisse $AP = a$. Les rectangles formés par les cordes parallèles à CC′ ayant tous leurs centres de gravité sur l'axe, leurs moments, par rapport à cet axe, seront nuls; la limite de leur somme le sera donc, et, par suite, on aura

$$y_1 = 0.$$

Le centre de gravité étant sur l'axe, il suffit de connaître son abscisse x_1.

La formule précédente devient, dans le cas actuel,

$$A x_1 = \lim. 2yx\alpha = 2\sqrt{2p} \lim. \Sigma x^{\frac{3}{2}} \alpha.$$

Mais, d'après une formule trouvée précédemment (n° 35), on a, entre les limites o et a,

$$\lim. \Sigma x^{\frac{3}{2}} \alpha = \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}};$$

donc

$$A x_1 = \frac{4\sqrt{2p}}{5} a^{\frac{5}{2}}.$$

Or, en faisant $BC = b$, on a

$$A = \frac{4}{3} ab,$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = \frac{3}{5} a.$$

C'est Archimède qui a découvert cette propriété, et même pour un segment de parabole déterminé par une sécante quelconque. Le calcul en serait tout à fait le même que celui que nous venons de faire pour une sécante perpendiculaire à l'axe de la courbe.

55. *Paraboles et hyperboles d'ordre quelconque.* — Soit maintenant l'équation $y = px^m$, dans laquelle m désigne un nombre de grandeur et de signe quelconque; on demande le centre de gravité de la surface terminée à cette courbe, à l'axe des x, et à deux perpendiculaires à l'axe des x, correspondantes aux abscisses a, a'.

L'application des formules générales donnera

$$A x_1 = p \lim. \Sigma x^{m+1} \alpha, \quad A y_1 = \frac{p^2}{2} \lim. \Sigma x^{2m} \alpha,$$

ou

$$A x_1 = p \frac{a^{2m+2} - a^{m+2}}{m+2}, \quad A y = \frac{p^2}{2} \cdot \frac{a'^{2m+1} - a'^{m+1}}{2m+1}.$$

Or nous avons trouvé (n° 35)

$$A = \frac{p(a'^{m+1} - a^{m+1})}{m+1},$$

d'où résulte

$$x_1 = \frac{m+1}{m+2} \cdot \frac{a'^{m+2} - a^{m+2}}{a'^{m+1} - a^{m+1}}, \quad y_1 = \frac{p(m+1)}{2(2m+1)} \cdot \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{a'^{m+1} - a^{m+1}}.$$

Si m est positif, la courbe est parabolique, et si l'on fait commencer l'aire en question à l'origine, on a $a = 0$; et, en désignant par b' l'ordonnée correspondante à a',

$$x_1 = \frac{m+1}{m+2} a', \quad y_1 = \frac{p(m+1)}{2(2m+1)} a'^m = \frac{(m+1)}{2(2m+1)} b'.$$

Dans la parabole du second degré, $m = \frac{1}{2}$, et l'on trouve

$$x_1 = \frac{3}{5} a', \quad y_1 = \frac{3}{8} b'.$$

Si m est négatif, la courbe est hyperbolique et donne lieu à une discussion intéressante à laquelle nous ne nous arrêterons pas. On reconnaîtra sans peine que, quand l'abscisse extrême a' croît sans limite, il est possible, suivant la valeur de m, que le centre de gravité s'éloigne indéfiniment de l'axe des y, en tendant vers l'axe des x, ou tende vers une limite déterminée.

56. *Centre de gravité des solides de révolution.* — Le centre de gravité sera évidemment sur l'axe de révolution; il suffira donc de connaître son abscisse. Pour la trouver, on coupera le solide par des plans infiniment voisins, perpendiculaires à l'axe de révolution que l'on prendra pour axe des x; et en supposant les poids proportionnels aux volumes, le produit du volume total par l'abscisse x_1 du centre de gravité sera égal à la somme des produits des segments compris entre deux plans consécutifs par l'x du centre de gravité de ce segment. Pour simplifier ces produits, on substituera à ce dernier x celui d'une quelconque des bases du segment, ou même tout autre qui en différerait d'une quantité infiniment petite; on remplacera encore le volume du segment par celui du cylindre intérieur ou extérieur. Par là on n'aura altéré le moment du segment infiniment petit du solide que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. La limite de la somme de ces nouveaux produits sera donc égale à la somme des moments eux-mêmes, ou au produit du volume total par x_1, et si l'on connaît cette limite de somme et le volume, on en déduira immédiatement x_1.

Cette proposition est exprimée par la formule suivante

$$\lim. \Sigma x y^2 \alpha = x_1 \lim. \Sigma y^2 \alpha,$$

57. *Paraboloïde.* — Si la courbe génératrice est une parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$ et tournant

autour de l'axe des x, on aura, en remplaçant y par sa valeur en x,

$$\lim. \Sigma x^2 \alpha = x_1 \lim. \Sigma x \alpha,$$

et, d'après la valeur générale de $\lim. \Sigma x^m h$, cette équation se réduira à la suivante, en désignant toujours par a et a' les abscisses extrêmes,

$$\frac{a'^3 - a^3}{3} = x_1 \frac{a'^2 - a^2}{2},$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3} \frac{a'^2 + aa' + a^2}{a' + a};$$

si $a = 0$, on a

$$x_1 = \frac{2}{3} a',$$

résultat connu d'Archimède.

Le cas où l'on ferait tourner la parabole autour de sa tangente au sommet est renfermé dans le suivant.

58. Généralisons ce résultat en prenant pour courbe génératrice celle dont l'équation est

$$y = px^m,$$

m désignant un nombre quelconque. L'équation générale devient

$$\lim. \Sigma x^{2m+1} \alpha = x_1 \lim. \Sigma x^{2m} \alpha,$$

ou

$$\frac{a'^{2m+2} - a^{2m+2}}{2m+2} = x_1 \frac{a'^{2m+1} - a^{2m+1}}{2m+1},$$

d'où l'on tirera x_1.

On retombe sur le cas précédent en supposant $m = \frac{1}{2}$, $a = 0$, et on retrouve

$$x_1 = \frac{2}{3} a'.$$

On aurait le cas où la parabole tourne autour de sa tangente au sommet, en supposant $m = 2$, ce qui donne, en prenant encore $a = 0$,

$$x_1 = \frac{5}{6} a'.$$

59. *Ellipsoïde.* — En prenant pour équation de la courbe génératrice

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2 x^2}{a^2},$$

l'équation qui doit donner x_1 sera

$$\lim . \Sigma x \left(\frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) \alpha = x_1 \lim . \Sigma \left(\frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) \alpha,$$

ou

$$\frac{2b^2}{a} \lim \Sigma x^2 \alpha - \frac{b^2}{a^2} \lim . \Sigma x^3 \alpha$$
$$= x_1 \left(\frac{2b^2}{a} \lim . \Sigma x \alpha - \frac{b^2}{a^2} \lim . \Sigma x^2 \alpha\right).$$

Supposons que nous considérions le volume commençant au sommet et terminé à l'abscisse a', nous trouverons, en substituant aux limites de sommes leurs valeurs données par la formule connue,

$$\frac{2b^2}{a} \frac{a'^3}{3} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a'^4}{4} = x_1 \left(\frac{b^2}{a} a'^2 - \frac{b^2}{a^2} \frac{a'^3}{3}\right).$$

Si l'on prend le demi-ellipsoïde, on a

$$a' = a, \quad \text{et, par suite,} \quad x_1 = \frac{5}{8} a.$$

Le calcul se ferait d'une manière semblable pour l'hyperboloïde.

60. S'il s'agissait d'un solide terminé par une surface quelconque, on le décomposerait comme il a été fait pré-

cédemment pour la mesure des volumes; on considérerait les éléments déterminés par deux séries de plans infiniment voisins, parallèles à deux des plans coordonnés, et on égalerait la somme de leurs moments par rapport à chacun des trois plans coordonnés, au moment de la résultante par rapport à ces mêmes plans. On négligerait dans chaque moment élémentaire une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; ce qui permettrait de prendre, au lieu du volume de ce filet infiniment étroit, celui du parallélipipède intérieur ou extérieur, et le centre de gravité de ce parallélipipède au lieu de celui du filet même. Si l'on peut trouver les limites de ces trois sommes de moments prises dans toute l'étendue du corps, on obtiendra les trois coordonnées du centre de gravité de ce corps en les divisant par son volume.

On voit donc que la détermination du centre de gravité des corps terminés par des surfaces quelconques se ramène à celle de limites de sommes d'infiniment petits.

CHAPITRE XII.

DES QUANTITÉS CONSIDÉRÉES COMME LIMITES DE RAPPORTS D'INFINIMENT PETITS.

61. Le point de vue auquel les modernes ont considéré les tangentes aux courbes, les a conduits naturellement aux rapports de quantités décroissant indéfiniment. Les anciens regardaient les tangentes comme des lignes telles, qu'à partir du point commun avec la courbe les deux branches de celle-ci se trouvaient d'un même côté de la droite; tandis que les modernes les ont regardées comme limites de sécantes passant par le point donné de la courbe et par un second point de la même courbe, qui se rapproche indéfiniment du premier. Il est résulté de là, comme nous allons le montrer, que les modernes ont été conduits à la recherche de limites de rapports d'infiniment petits, problème dont les anciens n'ont pas eu l'occasion de s'occuper.

Les points d'une courbe peuvent être rapportés à des systèmes de coordonnées très-divers, c'est-à-dire déterminés de bien des manières différentes par les valeurs de quantités variables. Nous allons examiner plusieurs de ces systèmes, et montrer que dans tous les cas la détermination de la tangente revient à celle de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites, dépendant l'une de l'autre d'après les données de la question.

62. *Coordonnées rectilignes.*— Soient M (*fig.* 23) un point donné sur une courbe rapportée à deux axes AX,

AY ; AP, MP ses coordonnées x, y ; M′ un point de la même courbe, qui se rapproche indéfiniment de M, et dont les coordonnées soient $x+h$, $y+k$; la sécante MM′ coupe l'axe des x en un point S, et la limite R de la position de ce point déterminera la limite de la sécante, ou la tangente. La limite de S sera connue si l'on trouve la limite de PS : or on a la proportion $\frac{y}{\text{PS}} = \frac{\text{M'H}}{\text{MH}} = \frac{k}{h}$.

Donc, en prenant les limites des deux membres,

$$\frac{y}{\text{PR}} = \lim. \frac{k}{h};$$

d'où

$$\text{PR} = \frac{y}{\lim. \frac{k}{h}} = y \lim. \frac{h}{k}.$$

Donc la détermination de la tangente à la courbe se ramène à celle de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites qui sont les différences des coordonnées du point donné et d'un point infiniment voisin pris sur la courbe, et qui sont liées l'une à l'autre au moyen de l'équation de la courbe donnée.

Au lieu de déterminer PR ou la *sous-tangente*, on peut chercher l'angle de la tangente avec l'axe des x. Soient θ l'angle des axes, ω l'angle cherché, $m = \lim. \frac{k}{h}$, on aura, par le triangle MRP,

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\theta-\omega)} = \frac{y}{\text{PR}} = m;$$

d'où

$$m \sin\theta \cos\omega - m \sin\omega \cos\theta = \sin\omega,$$

et, par suite,

$$\text{tang}\,\omega = \frac{m \sin\theta}{1 + m \cos\theta},$$

et, si les axes sont rectangulaires,

$$\operatorname{tang}\omega = m = \lim.\frac{k}{h}.$$

Il est inutile de faire remarquer qu'il faut avoir soigneusement égard aux signes des accroissements MH, M'H, sans quoi la sécante MM' et sa limite ne seraient pas du côté où elles doivent être par rapport à MH.

63. *Coordonnées polaires.*—Soient O le pôle (*fig.* 24), OX l'axe, M un point donné sur une courbe dont on a l'équation, et dont les coordonnées sont θ et r; M' un point infiniment voisin; h et k les accroissements de θ et r en passant de M à M' : la tangente en M sera la limite de la sécante SMM', et peut être déterminée par la limite de l'angle OMS, qui est la même que celle de MOM', puisque la différence de ces deux angles est MOM' qui tend vers zéro. Soit ω cette limite ou l'angle que fait la tangente avec OM. Décrivons de O avec OM pour rayon l'arc MH, et joignons MH; le triangle MHM' donnera

$$\frac{\sin HM'M}{\sin HMM'} = \frac{MH}{HM'}.$$

Observons maintenant que l'angle HM'M a pour limite ω; que l'angle H a pour limite un angle droit, puisque l'angle en O du triangle isocèle HOM a pour limite zéro; que, par conséquent, la somme des deux angles en M, M' dans le triangle MHM' a pour limite un angle droit, d'où il résulte que les limites de ces deux angles sont complémentaires. D'après cela, en égalant les limites des deux membres de l'équation précédente, on aura

$$\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \lim.\frac{HM}{HM'}.$$

Or on peut, d'après le principe fondamental des infini-

ment petits, remplacer HM par toute autre quantité dont le rapport avec HM ait pour limite l'unité; et on a vu, dans la Trigonométrie, que le rapport d'un arc infiniment petit à sa corde a pour limite l'unité. On peut donc remplacer la corde HM par l'arc dont la valeur est rh, et l'équation précédente devient

$$\tang\omega = \lim.\frac{rh}{k} = r\lim.\frac{h}{k} = \frac{r}{\lim.\frac{k}{h}}.$$

Le problème des tangentes, dans un système de coordonnées polaires, est donc encore ramené à la recherche de la limite du rapport de deux infiniment petits, dépendants l'un de l'autre, au moyen de l'équation de la courbe, et qui sont les différences des coordonnées de deux points infiniment voisins de la courbe.

64. *Troisième système de coordonnées.* — Supposons maintenant les points déterminés par leurs distances à deux points fixes A, B (*fig.* 25); soient M le point où l'on veut mener la tangente, et dont les deux coordonnées seront $AM = r$, $BM = r'$; M′ un point infiniment voisin ayant pour coordonnées $r + h$, $r' + k$; la tangente sera la limite de la sécante MM′, et peut être déterminée, par exemple, par les angles ω, ω' qu'elle forme respectivement avec MA, MB.

Ayant pris $MH = h$, $MK = k$ dans le sens qui convient au signe, et décrivant de A et B comme centres avec les rayons AH, MK des arcs de cercle, ils se rencontrent en M′. Si l'on joint M′H, M′K, les angles K et H auront chacun pour limites un angle droit, puisque les arcs KM′, HM′ tendront vers zéro; les angles formés par MM′ en M′ et en M auront, par suite, des limites complémentaires; ces limites pour les angles en M ont été désignées par ω, ω'.

Cela posé, on aura

$$\frac{KM}{MM'} = \frac{\sin MM'K}{\sin K}, \quad \frac{HM}{MM'} = \frac{\sin MM'H}{\sin H},$$

d'où

$$\frac{\sin MM'H}{\sin MM'K} \cdot \frac{\sin K}{\sin H} = \frac{h}{k};$$

en prenant les limites des deux membres,

$$(1) \qquad \frac{\cos\omega}{\cos\omega'} = \lim. \frac{h}{k}.$$

Les angles ω, ω' de la tangente avec MA, MB sont donc déterminés dès qu'on connaîtra $\lim. \frac{h}{k}$, puisque leur somme est connue.

Le problème des tangentes est donc encore ramené, dans ce nouveau système, à chercher la limite du rapport des différences infiniment petites des coordonnées de deux points de la courbe.

65. Au lieu de déterminer par le calcul les angles ω, ω', entre lesquels on a deux équations, on peut facilement construire la tangente d'après l'équation (1). En effet, si l'on prend sur MA et MB, ou sur leurs prolongements, deux longueurs MS, MK ayant un rapport égal à $\lim. \frac{h}{k}$, qu'on élève en S et R des perpendiculaires sur AM, MB, et qu'on joigne leur point de rencontre I à M, la droite IM sera la tangente, car les cosinus des angles IMS, IMR auront pour rapport

$$\frac{MS}{MR} \quad \text{ou} \quad \lim. \frac{h}{k}.$$

On aurait pu arriver directement à cette construction sans passer par le calcul des angles ω, ω', et par des con-

sidérations qui se retrouvent souvent dans l'emploi des infiniment petits en géométrie.

Sur le rayon AM prolongé (*fig.* 26), prenons une quantité constante MP; menons PS parallèle à M'H jusqu'à la rencontre de MM' en S; menons ensuite SQ parallèle à M'K; le quadrilatère MPSQ sera semblable à MHM'K, et l'on aura

$$MP : MQ :: MH : MK :: h : k.$$

A mesure que h et k tendent vers zéro, MQ tend donc vers la valeur finie dont le rapport à MP est la limite de $\frac{k}{h}$. La sécante MM' étant toujours dans la direction de la diagonale MS, la tangente sera la limite de cette direction, c'est-à-dire celle de la diagonale du quadrilatère limite de PMQS. Or les angles P et Q de ce quadrilatère, étant égaux respectivement à H et K, ont pour limites des angles droits. On construira donc facilement le quadrilatère limite quand on connaîtra la limite de $\frac{h}{k}$ ou de $\frac{k}{h}$; car on en déduit immédiatement la limite MR de MQ. Il suffit ensuite d'élever en P et en R des perpendiculaires à AM, MB, et de joindre leur point de rencontre I au point M : cette dernière ligne sera la tangente. Cette construction, obtenue par des considérations différentes, ne diffère pas de la précédente.

66. *Autre système de coordonnées.* — Supposons actuellement que les points soient déterminés par leur distance à un point fixe O (*fig.* 27), et une abscisse ou une ordonnée par rapport à une ligne fixe quelconque passant par O. Soient A l'origine des abscisses, $AP = x$, $PM = y$, $OM = r$; le point quelconque M sera déterminé par x et r, ou y et r.

Cela posé, M étant un point quelconque d'un lieu, déterminé par une relation entre ces coordonnées, on demande de trouver la direction de la tangente en ce point.

Soient $MK = k$, $PP' = h$ les accroissements correspondants de r et x pour passer à un point voisin M′ du lieu, et qu'on portera dans un sens ou dans l'autre, suivant qu'ils seront positifs ou négatifs. Dans le quadrilatère MHM′K, l'angle K tendra vers un angle droit en même temps que h et k vers zéro, et la diagonale MM′ vers la tangente.

Nous nous bornerons ici à l'un des procédés employés dans le cas précédent. Nous prendrons PR constant; par le point S de la sécante correspondant à l'abscisse AR, menons les droites SQ, ST parallèles à M′K, M′H : le quadrilatère MQST sera semblable à MKM′H, et la limite de la direction de sa diagonale MS sera la tangente cherchée. Or on pourra construire le quadrilatère limite si l'on connaît la limite de MQ, PR ou son égal TS étant constant; et comme on a

$$\frac{h}{k} = \frac{TS}{MQ},$$

il s'ensuit que la limite de MQ sera connue si l'on connaît celle du rapport $\frac{h}{k}$. Soit MI la limite de MQ; comme l'angle Q a pour limite un angle droit, le quadrilatère limite sera MIUV, et la diagonale MU la tangente. On voit qu'il suffit, pour la construire, d'élever en I une perpendiculaire à OI, et de chercher son point de rencontre U avec la perpendiculaire à OR. Si les deux coordonnées étaient r et y, au lieu de r et x, le même quadrilatère donnerait des résultats analogues, et la question serait toujours ramenée à trouver la limite du rapport

des différences des coordonnées de deux points infiniment voisins du lieu.

67. *Coordonnées angulaires.* — Considérons encore un système où les points seraient déterminés par deux angles formés par les droites menées de ces points à deux points fixes. Soient A, B (*fig.* 28) ces points fixes, $MAB = \alpha$, $MBA = \beta$ les deux angles qui déterminent la position d'un point quelconque M; on demande de mener la tangente en M à un lieu déterminé par une relation entre α et β. Soient h et k les accroissements positifs ou négatifs de α et β, quand on passe de M en M′, MP égal à une constante arbitraire, PS parallèle à M′U, SQ parallèle à M′K; les quadrilatères MPSQ, MUM′V seront semblables, et la tangente cherchée sera la limite de la direction de la diagonale MS. Pour la connaître, il suffit de déterminer les limites de MQ et des directions PS et QS. Quant à ces dernières, il est évident qu'elles ne sont autres que les directions de BM et AM qui sont les limites de celles de BM′, AM′. Pour avoir la limite MI de MQ, il suffit de connaître la limite du rapport $\frac{MU}{MV}$ qui est égal au rapport $\frac{MP}{MQ}$.

Or

$$\frac{MV}{MA} = \frac{\sin h}{\sin V}, \quad \frac{MU}{MB} = \frac{\sin k}{\sin U},$$

donc

$$\frac{MU}{MV} = \frac{MB}{MA} \cdot \frac{\sin k}{\sin h} \cdot \frac{\sin V}{\sin U} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin k}{\sin h} \cdot \frac{\sin V}{\sin U}.$$

Or les angles V et U ayant pour limite l'angle AMB, on a

$$\lim. \frac{\sin V}{\sin U} = 1;$$

de plus

$$\lim. \frac{\sin k}{\sin h} = \lim. \frac{k}{h},$$

puisque le rapport d'un angle infiniment petit à son sinus a pour limite l'unité. On a donc

$$\lim. \frac{MU}{MV} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \lim. \frac{k}{h} = \frac{MP}{MI};$$

donc enfin le problème est encore ramené à la recherche de la limite du rapport des différences des coordonnées de deux points infiniment voisins du lieu. Quand on l'aura trouvée, on connaîtra MI, et par les points P et I on mènera des parallèles à MA, MB, qui par leur rencontre détermineront un point de la tangente.

On pourrait procéder d'une autre manière, et calculer les angles de la tangente avec les rayons vecteurs ou les limites des angles VM'M, MM'U. On a, en effet,

$$\frac{\sin VM'M}{\sin V} = \frac{MV}{MM'}, \quad \frac{\sin MM'U}{\sin U} = \frac{MU}{MM'},$$

d'où

$$\frac{\sin VM'M}{\sin MM'U} = \frac{\sin V}{\sin U} \cdot \frac{MV}{MU};$$

or $\frac{\sin V}{\sin U}$ a pour limite 1; donc, en appelant x, y les angles de la tangente MT avec MA, MB, on aura

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \lim. \frac{MV}{MU} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \lim. \frac{h}{k},$$

et, comme la somme $x + y$ est connue, le problème est résolu dès que l'on connaît la limite du rapport $\frac{h}{k}$.

De l'existence des tangentes en général.

68. Nous venons de passer en revue un assez grand

nombre de systèmes de coordonnées, dont quelques-uns ne sont presque jamais employés, et nous avons reconnu que, dans tous les cas, le problème des tangentes était ramené à la recherche de la limite du rapport de deux quantités infiniment petites. Le nombre des systèmes que l'on pourrait employer pour la détermination des points sur un plan est illimité, et, par les cas variés que nous avons considérés, nous avons voulu faciliter les recherches auxquelles d'autres cas peuvent donner lieu. On cherchera toujours à ramener la direction de la sécante à dépendre d'infiniment petits quelconques, dont il soit possible de calculer la limite du rapport, soit que les points du lieu soient déterminés par une équation, soit qu'on connaisse la loi de leur génération sans en avoir déduit l'équation entre les coordonnées.

Mais, avant d'aller plus loin, il est à propos de s'assurer que le problème dont nous nous occupons a généralement une solution; c'est-à-dire qu'en tout point d'une courbe déterminée par une équation, ou par une loi de construction qui pourrait conduire à une équation entre des coordonnées de nature quelconque, il existe une tangente. En d'autres termes, il faut démontrer que lorsque deux variables dépendent l'une de l'autre, le rapport des accroissements infiniment petits correspondants de ces variables a en général une limite; car c'est à ce problème de calcul que nous avons ramené le problème géométrique.

Cette proposition importante peut être établie simplement, de la manière suivante.

Théorème général.

69. Soit y une fonction quelconque d'une variable x, assujettie seulement aux conditions suivantes : 1° que, lorsqu'à partir d'une valeur quelconque on donne un

accroissement h à x, il en résulte un accroissement unique k de y, qui tende vers zéro, si l'on fait tendre h vers zéro; 2° qu'à partir de toute valeur de x on en puisse prendre une autre qui en diffère d'une quantité finie déterminée, telle que si x varie dans le même sens dans tout l'intervalle compris entre elles, y varie constamment dans un même sens, c'est-à-dire toujours en augmentant ou toujours en diminuant.

Cela posé, il est facile de démontrer que, sous ces conditions, pour toute valeur de x il existe une limite finie pour le rapport des accroissements infiniment petits correspondants h et k; c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir que des valeurs exceptionnelles de x pour lesquelles ce rapport croisse ou décroisse indéfiniment.

En effet, soient x_0, X deux valeurs de x satisfaisant aux conditions ci-dessus indiquées; y_0, Y les valeurs correspondantes de y; partageons l'intervalle $X - x_0$ en n parties égales, que nous désignerons par h, et soient $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ les valeurs correspondantes des accroissements positifs de y, on aura

$$X - x_0 = nh, \quad Y - y_0 = k_1 + k_2, \ldots, k_n;$$

d'où résulte

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = \frac{\frac{k_1}{h} + \frac{k_2}{h} + \ldots + \frac{k_n}{h}}{n},$$

c'est-à-dire que le rapport invariable des accroissements finis de x et de y, quand on passe de x_0 à X, est la moyenne arithmétique des rapports $\frac{k_1}{h}, \frac{k_2}{h}, \ldots, \frac{k_n}{h}$, quel que soit le nombre entier n.

Si maintenant on fait croître n indéfiniment, les termes de ces rapports tendront vers zéro, et leur moyenne arithmétique étant toujours égale à la quan-

tité finie $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$, il est impossible qu'ils tendent tous vers zéro, ou qu'ils croissent tous indéfiniment.

Cette conclusion, relative à l'intervalle $X - x_0$, pouvant être appliquée à toute partie de cet intervalle, il s'ensuit qu'il est impossible que, dans aucun intervalle fini, la valeur de $\frac{k}{h}$ tende vers zéro ou croisse indéfiniment pour toutes les valeurs de x. Ce n'est donc que pour des valeurs exceptionnelles et en nombre limité que $\frac{k}{h}$ peut ne pas avoir une valeur finie: ce que nous voulions établir.

70. Nous avons supposé dans ce raisonnement que $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ avait une valeur finie. En ne s'assujettissant pas à cette condition, voyons s'il est possible que toutes les valeurs de $\frac{k}{h}$ tendent vers zéro ou croissent indéfiniment.

Si tous les rapports tendent vers zéro, leur moyenne y tendra nécessairement, et comme elle est constante, elle ne peut être que zéro; donc $Y - y_0 = 0$ ou $Y = y_0$. Et comme il en sera de même si l'on considère l'intervalle entre x_0 et toute autre valeur choisie entre x_0 et X, il en résulte que toutes les valeurs de y correspondantes aux valeurs de x comprises entre x_0 et X sont égales à y_0. La fonction désignée par y ne serait donc autre chose qu'une constante, et l'on voit alors que non-seulement $\frac{k}{h}$ tendra vers zéro, mais qu'il sera toujours rigoureusement nul. Le lieu en question serait donc une droite parallèle à l'axe des x, si x et y sont des coordonnées rectilignes.

Si maintenant tous les rapports $\frac{k}{h}$ croissaient sans limites, les rapports réciproques $\frac{h}{k}$ tendraient tous vers zéro, et le lieu représenterait une droite parallèle à l'axe des y; auquel cas tous les rapports $\frac{h}{k}$ seraient rigoureusement nuls, et l'on dirait que les rapports $\frac{k}{h}$ sont tous infinis.

Si donc le lieu ne renferme aucune portion de ligne droite parallèle à l'un des axes, il y aura une limite finie pour le rapport des accroissements infiniment petits correspondants h, k, à l'exception peut-être de certaines valeurs particulières de x; et par conséquent en tous les points d'une courbe il existe en général une tangente.

Les cas exceptionnels où la limite de $\frac{k}{h}$ serait nulle ou infinie correspondraient, dans un système de coordonnées rectilignes, aux points où les tangentes seraient parallèles à l'un ou à l'autre des axes; cela résulte de la signification géométrique de la limite de $\frac{k}{h}$ dans un pareil système.

Dérivées des fonctions.

71. Cette limite du rapport $\frac{k}{h}$ se nomme la dérivée de la fonction y par rapport à x. Si cette fonction y est représentée par $F(x)$, on représente la dérivée par $F'(x)$. Ainsi dorénavant la signification de cet accent sera définie, pour toute fonction F, par l'équation suivante :

$$\lim. \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x).$$

En employant cette nouvelle dénomination, nous pouvons donc dire que le problème des tangentes est ramené à la détermination de la dérivée d'une des coordonnées par rapport à l'autre; et que le coefficient d'inclinaison de la tangente sur l'axe des abscisses est la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse.

Les dérivées ont beaucoup d'autres usages que la détermination des tangentes; nous nous bornerons en ce moment à quelques remarques très-simples. Si nous représentons, pour abréger, par k l'accroissement de $F(x)$, correspondant à l'accroissement h donné à x, on aura

$$\lim. \frac{k}{h} = F'(x),$$

et par conséquent $\frac{k}{h}$ diffère de $F'(x)$ d'une quantité qui tend vers zéro en même temps que h; la désignant par ω, on aura

$$\frac{k}{h} = F'(x) + \omega,$$

d'où

$$k = h[F'(x) + \omega] = hF'(x) + h\omega.$$

Ainsi $hF'(x)$ ne diffère de k que d'une quantité infiniment petite par rapport à h ou à k; donc *on pourra substituer* $hF'(x)$ *à* k *toutes les fois que* k *sera un des termes d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits, dont on cherchera la limite.* Remarquons que $hF'(x)$ est l'accroissement de l'ordonnée de la tangente pour l'accroissement h de l'abscisse. Donc $h\omega$ est la différence des ordonnées de la courbe et de la tangente; elle est, comme on le voit, infiniment petite par rapport à l'accroissement même de l'ordonnée; et il faut remarquer que l'ordonnée peut avoir une direction arbitraire pourvu

que ce ne soit pas celle de la tangente elle-même, sans quoi $F'(x)$ ne serait pas une quantité finie et les formules précédentes ne subsisteraient plus. Il résulte de là une grande simplification, parce que la quantité ω serait en général très-compliquée; et en négligeant la quantité $h\omega$, il n'en résulte aucune erreur dans les limites des sommes ou des rapports.

72. La dérivée d'une fonction peut servir à reconnaître dans quel sens varie cette fonction à partir d'une valeur quelconque de la variable dont elle dépend; ce qui est souvent utile. En effet, en désignant toujours par h et k les accroissements correspondants de x et $F(x)$, nous avons trouvé

$$k = h[F'(x) + \omega],$$

ω étant infiniment petit en même temps que h.

Or si $F'(x)$ n'est pas nul pour la valeur x que l'on considère, ω ayant pour limite zéro, finira par être constamment au-dessous de $F'(x)$ et le facteur $F'(x) + \omega$ sera de même signe que $F'(x)$. Donc k sera de même signe que h, si $F'(x)$ est positif, et de signe contraire s'il est négatif. Ainsi une fonction croît dans le même sens que la variable pour toutes les valeurs de x qui rendent sa dérivée positive, et en sens contraire pour celles qui la rendent négative.

On reconnaît encore facilement que de deux fonctions, celle-là croît le plus rapidement dont la dérivée est la plus grande.

En effet, soient les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$; k et l leurs accroissements correspondants à l'accroissement h de x; on aura

$$k = h[F'(x) + \omega], \quad l = h[f'(x) + \omega'],$$

ω et ω' étant infiniment petits avec h. On tire de là

$$k - l = h[F'(x) - f'(x) + \omega - \omega'],$$

et puisque l'on suppose $F'(x)$ et $f'(x)$ inégales, le second membre finira par être de même signe que

$$h[F'(x) - f'(x)].$$

Ainsi en supposant, par exemple, h positif, on aura

$$k > l \quad \text{si} \quad F'(x) > f'(x).$$

Donc la fonction qui augmente le plus rapidement avec x est celle dont la dérivée, par rapport à x, a la plus grande valeur.

73. Nous avons vu que le rapport fixe $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$ était toujours compris entre le plus petit et le plus grand des rapports $\frac{k}{h}$, quelque près qu'ils soient de leurs limites, et, par conséquent, que ce rapport fixe était compris entre la plus petite et la plus grande de ces limites, qui sont les différentes valeurs que prend la dérivée $F'(x)$ quand x passe de x_0 à X. Si donc la fonction $F'(x)$ est continue, c'est-à-dire si elle ne peut passer d'une valeur à une autre qu'en passant par toutes les intermédiaires, il y aura entre x_0 et X une certaine valeur de x qui rendra $F'(x)$ égal à la quantité intermédiaire $\frac{Y - y_0}{X - x_0}$. Désignant cette valeur de x par x_1, on aura ainsi

$$\frac{Y - y_0}{X - x_0} = F'(x_1), \quad \text{ou} \quad Y - y_0 = (X - x_0)\, F'(x_1),$$

ce qui revient à dire qu'entre les points de la courbe dont les coordonnées sont x_0, y_0 et X, Y, il en existe un où la

tangente est parallèle à la corde qui joint les points extrêmes.

Remarque. — Cette formule présente évidemment cette proposition importante démontrée tout à l'heure, et que nous énoncerons spécialement :

Une expression dont la dérivée par rapport à x est nulle, quel que soit x, est nécessairement constante, c'est-à-dire indépendante de x.

74. L'équation $\frac{k}{h} = F'(x) + \omega$ démontrée, quelle que soit la fonction F, peut se mettre sous la forme

$$k = Mh,$$

M désignant une fonction finie de x et de h qui tend vers $F'(x)$ quand h tend vers zéro.

Si, dans cette fonction M, on changeait x en $x + h_1$, elle subirait un accroissement qui, d'après la proposition générale, serait de la forme $M_1 h_1$, M_1 désignant une fonction de x, h et h_1 qui reste finie, quelque petits que soient h et h_1. Si l'on désigne par k_1 l'accroissement que subit alors k, on aura

$$k_1 = M_1 h h_1.$$

Si de même on change x en $x + h_2$ dans M_1, il croîtra d'une quantité de la forme $M_2 h_2$, M_2 étant une quantité finie dépendante de x, h, h_1, h_2; désignant par k_2 l'accroissement de k_1, on aura ainsi

$$k_2 = M_2 h h_1 h_2.$$

Et l'on pourrait continuer de même indéfiniment.

Si l'on suppose que les accroissements successifs donnés

à x soient égaux, on aura

$$k = Mh, \quad k_1 = M_1 h^2, \quad k_2 = M_2 h^3;$$

et ainsi de suite indéfiniment.

On arriverait ainsi à cette proposition générale :

Un accroissement d'un ordre quelconque d'une fonction, correspondant à un accroissement constant à chaque opération, et infiniment petit du premier ordre, de la variable dont elle dépend, est un infiniment petit d'un ordre égal au nombre de ces opérations.

75. Ces accroissements de différents ordres peuvent facilement être représentés géométriquement par la considération de la courbe dont x et y seraient les coordonnées.

Soient M (*fig.* 29) un quelconque de ses points,

$$h = PP' = P'P'' = P''P''' = \ldots,$$

M', M'', M''', etc., les points de la courbe correspondants aux points P', P'', P''', etc. En prolongeant la corde MM' jusqu'à l'ordonnée suivante en I, on aurait, en menant MH, M'H', etc., parallèles à AX,

$$M'H = k, \quad HH' = M'H.$$

Mais M''H' n'est autre chose que l'accroissement de y en partant de $x+h$; donc il est ce que devient k quand on y change x en $x+h$, et, par conséquent, M''H' — M'H ou —IM'' sera l'accroissement de k, que nous avons désigné par k_1.

Si l'on prolongeait maintenant M'M'' jusqu'à l'ordonnée suivante, on aurait une ligne correspondante à IM'', qui serait la valeur de k_2, dans laquelle on changerait x en $x+h$, puisqu'on ferait les mêmes opérations en partant de M', que l'on avait faites en partant de M. On aurait donc l'accroissement de k_1 ou k_2, en retranchant ces

deux lignes en les affectant du signe convenable, et l'on formerait ainsi les accroissements des divers ordres successifs.

On pourrait prendre une autre représentation géométrique d'une fonction et de ses différences successives k, k_1, k_2,... : par exemple, supposer que x représente la longueur de l'arc d'une courbe et y le rayon vecteur correspondant, ou l'inclinaison de la tangente, ou toute autre grandeur dépendante de la longueur x de l'arc; on ferait croître l'arc par degrés égaux entre eux, et l'on considérerait les valeurs correspondantes de y sur lesquelles on ferait les opérations que nous venons d'indiquer dans le système de coordonnées rectilignes; mais les représentations géométriques seraient beaucoup moins simples.

Du problème réciproque.

76. Dans ce qui précède, nous avons supposé que tous les points d'une courbe étaient donnés, soit par une équation, soit par un mode quelconque de génération, et nous nous proposions de trouver la tangente en un quelconque de ces points. On pourrait réciproquement se donner l'équation générale ou un mode de génération de toutes les tangentes à une courbe inconnue, et se proposer de déterminer le point de la courbe qui se trouve sur une quelconque de ces tangentes. Ce problème inverse se résoudra au moyen de la remarque suivante.

Le point de contact d'une tangente à une courbe quelconque est la limite de son point de rencontre avec une tangente infiniment voisine.

Soient, en effet, TMT′ (*fig.* 30) une tangente fixe, M son point de contact, M′ un point de la courbe, infiniment voisin de M, IM′ la tangente en M′ et I son point de rencontre

avec T'T. La corde MM' tend vers zéro lorsque M' tend vers sa limite M, et c'est le plus grand côté du triangle MIM'; car, d'après la définition de la tangente, la sécante MM' tendant vers zéro fait avec la tangente en M ou M' un angle dont la limite est zéro; l'angle I opposé à MM' tend donc vers deux droits, et le côté MM', opposé au plus grand angle, est le plus grand du triangle. La distance IM, plus petite que MM', tend donc vers zéro; et, par conséquent, le point fixe M est la limite du point de rencontre I de la tangente en M avec une tangente infiniment voisine.

De là résulte la solution du problème, qui consiste à déduire tous les points d'une courbe de la connaissance de toutes ses tangentes. Pour cela, on considérera l'une quelconque de ces dernières, et l'on cherchera sa rencontre avec une tangente voisine d'après les équations connues de ces lignes, ou d'après la loi donnée de leur construction; ou déterminera la limite de ce point lorsque la seconde tangente s'approche indéfiniment de la première; on connaîtra ainsi le point de la courbe qui se trouve sur une tangente quelconque : le problème revient donc alors à une recherche ordinaire de lieu géométrique.

Il est bien certain que, si l'on admet qu'il y ait une courbe tangente au système des lignes données, on la trouvera par le procédé que nous venons d'indiquer. Mais, si l'existence de cette courbe n'était pas admise, il est facile de reconnaître que celle que l'on obtient sera effectivement tangente à toutes les droites du système qui auront des points communs avec elle. En effet, considérons deux de ces droites telles, que dans le passage continu de l'une à l'autre chacune rencontre toujours celle qui suit, quelque voisine qu'elle en soit; faisons passer une courbe par tous les points de rencontre successifs de chacune

d'elles et de celle qui la suit; cela peut se faire d'une infinité de manières : il suffira que la forme d'équation choisie renferme assez de constantes indéterminées. Or chaque droite est coupée par celle qui la précède et par celle qui la suit en deux points qui sont d'autant plus près du point du lieu limite, que les droites sont plus voisines; la distance de ces deux points ou la corde interceptée par la droite dans la courbe variable peut donc devenir moindre que toute grandeur donnée, et, par conséquent, les droites du système sont aussi voisines qu'on voudra d'être tangentes à la courbe variable. Donc enfin la limite de cette dernière, ou le lieu des points limites est tangent à toutes les droites.

Cette proposition est un cas particulier d'une plus générale que nous traiterons avec plus de détail par la suite.

CHAPITRE XIII.

APPLICATION DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES A QUELQUES EXEMPLES.

77. *Parabole.* — En la rapportant à son axe et à la tangente au sommet, son équation est

$$y^2 = 2px;$$

la valeur de la sous-tangente TP (*fig.* 31) a pour expression, d'après la formule générale,

$$\text{TP} = y \lim. \frac{h}{k}.$$

Pour trouver $\lim. \frac{h}{k}$, il faut exprimer que l'équation de la courbe est satisfaite par $x + h$, $y + k$, ainsi que par x, y; ce qui donne

$$y^2 = 2px, \quad (y + k)^2 = 2p(x + h),$$

et, en retranchant les termes égaux,

$$2ky + k^2 = 2ph.$$

Divisant par k, il vient

$$2y + k = 2p\frac{h}{k},$$

en prenant les limites des deux membres

$$2y = 2p \lim. \frac{h}{k}, \quad \text{d'où} \quad \lim. \frac{h}{k} = \frac{y}{p}.$$

Donc

$$\text{TP} = \frac{y^2}{p} = 2x.$$

La sous-tangente est donc double de l'abscisse du point de contact; ce qui donne une construction très-simple de la tangente.

Si au lieu de la sous-tangente on cherche l'angle MTX, on aura

$$\text{tang MTX} = \lim. \frac{k}{h} = \frac{p}{y}.$$

De sorte que si l'on prend $PN = p$, l'angle cherché sera égal à PMN; la tangente sera donc perpendiculaire à MN. Cette dernière ligne est donc la normale, et la sous-normale est constante et égale à p; ce qui donne une construction simple de la normale et, par suite, de la tangente.

78. Supposons maintenant la parabole rapportée à sa directrice et son foyer F. Les coordonnées seront un rayon vecteur et une abscisse, et l'équation sera

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

On aura alors $k = h$, et en prenant deux quantités égales quelconques PH, MQ, et élevant en H et Q des perpendiculaires à AX, FQ, on aura un point S de la tangente. On voit que la ligne MS partage en deux parties égales l'angle de FQ avec une parallèle MI à l'axe, vu l'égalité des deux triangles SMQ, SMI. Cette propriété donne une autre construction fort simple de la tangente.

79. *Ellipse et hyperbole.* — L'ellipse rapportée à ses axes a pour équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Pour avoir la limite du rapport $\frac{k}{h}$, on remplacera x et y par $x + h$, $y + k$, et, en retranchant les deux

équations, on aura

$$2a^2yk + a^2k^2 + 2b^2xh + b^2h^2 = 0,$$

et, en divisant par h,

$$(2a^2y + a^2k)\frac{k}{h} + 2b^2x + b^2h = 0.$$

Prenant les limites de tous les termes, on aura, d'après le principe fondamental des limites,

$$2a^2y \lim.\frac{k}{h} + 2b^2x = 0;$$

d'où

$$\lim.\frac{k}{h} = -\frac{b^2x}{a^2y} = \tang\omega,$$

ω désignant l'angle de la tangente avec l'axe des x.

Le même calcul, fait en partant de l'équation de l'hyperbole $a^2y - b^2x^2 = -a^2b^2$, donnerait évidemment

$$\tang\omega = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

80. Considérons maintenant l'ellipse rapportée à ses deux foyers; son équation sera

$$r + r' = 2a,$$

et l'on aura

$$k = -h.$$

Si donc on prend sur FM prolongé (*fig.* 32) une quantité arbitraire MH; que de M vers F′ on prenne une quantité égale MK; qu'en H et K on élève des perpendiculaires à FM, F′M, et qu'on joigne leur point de rencontre S au point M, on aura la tangente à l'ellipse. Il est évident qu'elle partage l'angle HMF′ des rayons vecteurs en deux parties égales.

S'il s'agissait d'une hyperbole, on aurait

$$r' - r = 2a, \quad k = h,$$

on devrait donc alors porter au delà de M une longueur MK′ = MH et élever en H et K′ des perpendiculaires aux rayons vecteurs, puis joindre leur point de rencontre S′ au point donné M, et l'on aurait la tangente. On voit qu'elle divise l'angle HMK′ en deux parties égales.

81. *Exemple de coordonnées angulaires.* — Considérons maintenant le système de coordonnées où un point M (*fig.* 33) est déterminé par les angles α, β, que les droites menées de ce point à deux points fixes A, B forment avec AB, et prenons l'équation simple

$$\alpha + \beta = a,$$

qui représente un segment capable du supplément de a, et décrit sur la corde AB. On aura alors

$$k = -h,$$

et l'on devra prendre (n° 67) deux longueurs MP, MI, telles, que $\frac{MP}{MI} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{MB}{MA}$, et de construire sur elles un parallélogramme MPSI; la diagonale MS sera la tangente. Or les deux triangles AMB, MIS, ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables: d'où il suit que l'angle IMS est égal à α, et que MSI ou TMA est égal à β.

La tangente fait donc avec chacun des côtés MA, MB un angle égal à celui que l'autre fait avec la base AB, comme cela est évident par la mesure des angles.

82. *Spirale d'Archimède.* — Soient OX (*fig.* 34) la direction à partir de laquelle on compte les angles θ; O le

pôle, M un point quelconque de la courbe, $OM = r$, et a une ligne donnée; l'équation de cette courbe est

$$r = a\theta;$$

l'angle OMT de la tangente avec OM est donné par la formule générale

$$\text{tang}\,\omega = r \lim. \frac{h}{k}.$$

Or, d'après l'équation de la spirale, on a

$$k = ah;$$

donc, ω étant OMT,

$$\text{tang OMT} = \frac{r}{a} = \theta.$$

Si l'on mène la normale MN et la perpendiculaire NOT à OM, les lignes OT, ON sont, dans le système des coordonnées polaires, la sous-tangente et la sous-normale : dans le cas actuel, on aura

$$OT = r\,\text{tang OMT} = r\theta, \quad ON = \frac{\overline{OM}^2}{OT} = a.$$

La sous-normale est donc constante, ce qui donne une construction bien simple de la normale et, par suite, de la tangente.

Le rayon vecteur OM augmentant indéfiniment avec θ, et ON restant constant, l'angle OMN tend vers zéro; le rayon vecteur tend donc indéfiniment à être perpendiculaire à la tangente, sans le devenir jamais.

Archimède, au lieu de la sous-normale, avait cherché la sous-tangente; il avait démontré que sa longueur était égale à l'arc de cercle MR décrit de O comme centre avec OM pour rayon, et terminé à l'axe OX, ce qui n'est autre chose que $r\theta$, comme nous l'avons trouvé.

83. *Spirale logarithmique.* — L'équation de cette spirale est, en désignant par m une ligne donnée, et par a un nombre que nous supposerons plus grand que l'unité,

$$r = ma^{\theta}.$$

En considérant les valeurs négatives de θ comme devant être portées en sens contraire des positives, on a une infinité de spires convergeant vers le point A (*fig.* 35), qu'on nomme pour cela asymptotique. Les valeurs positives de θ donnent une infinité de spires qui s'agrandissent indéfiniment. Pour avoir l'angle AMT de la tangente avec le rayon vecteur AM, il faut chercher la limite du rapport des accroissements k et h de r et θ, et diviser r par cette limite.

Or on a

$$\frac{k}{h} = ma^{\theta} \cdot \frac{a^h - 1}{h},$$

et nous avons fait voir (n° 36) que la limite d'une expression de la forme $\frac{b^u - 1}{u}$, lorsque u tend vers zéro, est $\frac{\log b}{\log e}$. Il en résulte que $\lim. \frac{a^h - 1}{h} = \frac{\log a}{\log e} = la$, en désignant par la caractéristique l les logarithmes pris dans la base de Néper; et, par conséquent, $\lim. \frac{k}{h} = ma^{\theta}\, la$.

On aura donc

$$\text{tang AMT} = \frac{1}{l.a};$$

ainsi tous les rayons partant de A sont également inclinés sur la spirale.

Exemple où l'on n'emploie pas l'équation de la courbe

84. *Cycloïde.* — D'après la génération de cette courbe, nous avons vu (n° 37) qu'il fallait, pour en avoir un

point quelconque M (*fig.* 11), prendre à partir de son origine A une longueur arbitraire AT, tracer le cercle générateur tangent en T à l'axe AB et prendre l'arc TM égal à AT. Ces deux lignes AT et TM constituent bien un système de coordonnées, dans le sens le plus général du mot, et l'équation de la courbe serait TM = AT; mais les équations seraient si compliquées en l'employant pour d'autres courbes, que nous n'avons pas dû le considérer dans les méthodes générales exposées précédemment.

Nous avons vu encore que, pour passer du point M à un autre point M′, il suffisait de prendre sur le cercle TM un arc MI, mener par I une parallèle à AB et prendre IM′ = MI.

Cela posé, menons les cordes MI, MM′; la tangente en M à la cycloïde sera la limite de la direction MM′; et la limite de la direction MI sera la tangente au cercle TM. Mais dans le triangle MIM′, le rapport des sinus des angles en M, M′ est celui des côtés MI, IM′ ou $\frac{M'I}{MI}$; et la limite de ce dernier ne sera pas changée si l'on remplace la corde MI par l'arc de cercle sous-tendu, dont le rapport à la corde a pour limite l'unité. Mais $\frac{M'I}{\text{arc MI}} = 1$: donc la limite du rapport des sinus de M et M′ est 1, et par conséquent les limites des sinus sont égales; et comme l'angle I de ce triangle a pour limite celui de la tangente en M au cercle avec MR, il en résulte que les limites des deux angles M, M′ sont égales à la moitié du supplément de ce dernier, ou à l'angle UMQ. Donc MU est la tangente, et MT la normale.

85. *Conchoïde.* — Supposons que d'un point donné A (*fig.* 36) on mène à un point quelconque M d'une courbe donnée une droite sur laquelle on porte une longueur

constante MN, on formera une nouvelle courbe; on propose de lui mener la tangente NU en un point quelconque N, connaissant la tangente MT au point correspondant M de la première.

Soient M′, N′ deux points correspondants des deux courbes, infiniment voisins de M et N; il s'agit d'avoir la limite de la direction de la droite NN′; décrivons de A comme centre les arcs MH, NK; comme M′N′ = MN, on aura HM′ = KN′. Dans les triangles rectilignes MM′H, NN′K; les angles H, K ont pour limites des angles droits; l'angle M′ a pour limite TMA, N′ a pour limite UNA, et c'est ce dernier qu'il faut déterminer.

Or on a

$$\frac{\sin N'}{\sin N} = \frac{NK}{KN'}, \quad \frac{\sin M'}{\sin M} = \frac{MH}{HM'};$$

d'où

$$\frac{\sin N'}{\sin N} : \frac{\sin M'}{\sin M} :: NK : MH :: AN : AM,$$

et passant aux limites,

$$\text{tang}\,UNA : \text{tang}\,TMA :: AN : AM.$$

Connaissant tang UNA, on construira facilement la tangente NU.

Lorsque la courbe donnée se réduit à une ligne droite XY, la seconde devient celle qu'on appelle conchoïde, imaginée par Nicomède pour la construction du problème des deux moyennes proportionnelles. Dans ce cas, l'angle TMA (*fig.* 37) est XMA, et sa tangente est $\frac{AB}{BM'}$, AB étant perpendiculaire sur XY. La proportion précédente devient alors

$$\text{tang}\,UNA : \frac{AB}{BM} :: AN : AM :: AQ : AB;$$

d'où

$$\text{tang UNA} = \frac{AQ}{BM}.$$

Si donc on prend $BE = AQ$, BME sera l'angle cherché UNA.

86. *Cyssoïde.* — Soient AB (*fig.* 38) le diamètre d'un cercle donné; BU sa tangente en B; AV une sécante quelconque partant de A; M son point de rencontre avec le cercle. Si l'on prend $VN = AM$, le lieu des points N est la *cyssoïde de Dioclès*, que ce géomètre d'Alexandrie imagina encore pour le problème des deux moyennes.

Soit la sécante infiniment voisine AM'N'V'; NN' sera la sécante à la cyssoïde, et sa limite sera la tangente cherchée.

Décrivons de A comme centre les arcs de cercle M'H, MI, VK; le point en passant en N' se sera éloigné de A de la quantité $KV' + MH$; puis, qu'on porte, à partir de l'extrémité V' qui s'est éloignée de la quantité KV', une longueur moindre que AM de MH.

Dans le triangle rectiligne MIN', l'angle I tend vers un angle droit, et par conséquent les deux autres N, N' vers des limites complémentaires; il en sera de même dans les triangles MM'H, NN'I, en H et K. Or on a

$$\frac{\sin N}{\sin N'} = \frac{IN'}{IN} = \frac{HM + KV'}{IN}, \quad \frac{HM}{IN} = \frac{HM}{M'H} \cdot \frac{M'H}{IN} = \frac{HM}{M'H} \cdot \frac{AM'}{AN};$$

$$\frac{KV'}{IN} = \frac{KV'}{KV} \cdot \frac{KV}{IN} = \frac{KV'}{KV} \cdot \frac{AV}{AN}.$$

Considérons maintenant les triangles rectilignes M'HM, KVV', et représentant leurs angles par la seule lettre du sommet, on aura

$$\frac{HM}{M'H} = \frac{\sin M'}{\sin M}, \quad \frac{KV'}{KV} = \frac{\sin V}{\sin V'}.$$

Cela posé, désignons par ω la limite de l'angle N', ou l'angle de la tangente à la cyssoïde avec son rayon vecteur AN, et par θ l'angle MAB; nous trouverons immédiatement, en passant aux limites,

$$\cot\omega = \frac{AM}{AN}\tang\theta + \frac{AV}{AN}\tang\theta = \frac{(AM + AV)}{AN}\cdot\frac{MB}{AM},$$

ce qui se construira facilement.

87. *Quadratrice.* — Soient A (*fig.* 39) le centre d'un cercle, CB un quadrant. Supposons un rayon qui se meuve uniformément de AB en AC, et une ligne qui se meuve parallèlement à AB d'un mouvement uniforme, en partant de cette première position en même temps que le rayon mobile et arrivant en même temps que lui en C; les intersections successives de ces deux lignes mobiles forment un lieu qu'on nomme la *quadratrice :* elle porte le nom de *Dinostrate*, soit que ce géomètre l'ait imaginée, soit seulement qu'il l'ait appliquée à la quadrature du cercle.

Cela posé, proposons-nous de mener la tangente en un point quelconque M de cette courbe. Soit M' un point infiniment voisin, de la même courbe; il s'agit de trouver la limite de la direction MM', ou la limite de l'angle M'MP. Abaissons M'I perpendiculaire sur MP. D'après la loi du mouvement angulaire de AN, et du mouvement de translation de PM, on aura la proportion

$$M'AM : \frac{\pi}{2} :: P'P : AC :: M'I : AC.$$

Or

$$M'I = M'M \sin M'MI,$$

$$M'M = AM\frac{\sin M'AM}{\sin AM'M}.$$

donc

$$\frac{M'I}{\sin M'AM} = \frac{AM \sin M'MI}{\sin AM'M}.$$

Prenons les limites des deux membres. On pourra, sans changer celle du premier, remplacer le sinus par l'angle, et, d'après la première proportion, on trouve pour résultat $\frac{2\,AC}{\pi}$.

Désignons par ω la limite de l'angle $M'MI$, celle de $AM'M$ sera $PMN - \omega$, et l'on aura

$$\frac{\sin \omega}{\sin (PMN - \omega)} = \frac{2\,AC}{\pi\,AM}.$$

Cette équation donne immédiatement la valeur de tang ω. Mais elle fournit aussi une construction simple de la tangente, puisque cette ligne divise l'angle connu PMN en deux parties dont le rapport des sinus est connu et égal à celui du cercle au quart de sa circonférence. Il suffit de déterminer un point dans cet angle tel, que le rapport des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés de l'angle soit celui de deux lignes données, ce qui n'offre aucune difficulté.

La solution de ce problème dépend, comme on le voit, du rapport de la circonférence au diamètre, ou de la quadrature du cercle.

Lorsque le rayon AN a décrit un angle droit, il est évident que le point M se trouve en C ; l'angle PMN devient droit et l'équation ci-dessus devient

$$\tang \omega = \frac{2}{\pi},$$

ce qui donne la direction de la tangente en C.

Si l'on voulait connaître la position de M au moment

du départ, où les deux droites mobiles se confondent avec AB, il faudrait chercher la limite de AM quand l'angle NAB tendrait vers zéro. Or on a, pour un point quelconque du lieu, en désignant l'angle NAB par θ et AM par r,

$$r = \frac{2\,\mathrm{AC}}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta}.$$

La limite de r est donc $\frac{2\,\mathrm{AC}}{\pi}$; et, portant cette valeur de A en S, le point S appartiendra à la cyssoïde.

Exemples de la détermination des points d'une courbe par ses tangentes.

88. 1er Exemple. — On donne deux points fixes B, C (*fig.* 40) sur deux droites indéfinies AX, AY. Une droite MN se meut de manière que l'on ait constamment la proportion BM : MA :: AN : NC. Trouver la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Pour cela on cherchera :

1°. La limite du point de rencontre d'une quelconque de ces droites avec les droites infiniment voisines;

2°. Le lieu de ces points limites, pour toutes les positions de MN.

1°. Soient

$$\mathrm{AC} = a, \quad \mathrm{AB} = b, \quad \mathrm{AN} = u, \quad \mathrm{AM} = v,$$

on aura, pour toutes les positions de MN,

$$b - v : v :: u : a - u, \quad \text{d'où} \quad av + bu = ab,$$

et pour la position M'N', on aura

$$a(v - \mathrm{M'M}) + b(u + \mathrm{NN'}) = ab;$$

d'où résulte

$$b.\mathrm{NN'} - a\mathrm{M'M} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{M'M}}{\mathrm{NN'}} = \frac{b}{a},$$

et le point O', limite de O, sera déterminé par la limite du rapport $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{ON}}$.

Si par M' on mène une droite M'I parallèle à AX, la limite de $\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{ON}}$ sera précisément la même que celle de $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{ON}}$ ou $\frac{\mathrm{MO'}}{\mathrm{O'N}}$; et l'on aura cette suite d'égalités

$$\frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{M'I}}{\mathrm{NN'}} = \frac{\mathrm{M'I}}{\mathrm{M'M}} \cdot \frac{\mathrm{M'M}}{\mathrm{NN'}} = \frac{u}{v} \cdot \frac{b}{a}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{MO'}}{\mathrm{NO'}} = \frac{bu}{av}.$$

2°. Les coordonnées x, y du point O' ainsi déterminé, satisferont aux proportions suivantes :

$$x : u - x :: bu : av$$

et

$$v - y : y :: x : u - x, \quad \text{ou} \quad uy + vx = uv.$$

Éliminant u et v entre ces deux équations et la première $av + bu = ab$, on trouve pour équation du lieu

$$(ay - bx - ab)^2 = 4ab^2x$$

ou

$$(ay - bx)^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0,$$

ce qui détermine une parabole tangente en B et C aux deux droites AY, AX.

89. 2e Exemple. — Une droite mobile MN coupe

deux droites fixes AX, AY de telle sorte, que AM + AN soit égale à une constante a. Trouver la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Si l'on pose AN $= u$, AM $= v$, la condition donnée sera exprimée par l'équation

$$u + v = a.$$

La droite MN est donc déterminée par une équation qui n'est qu'un cas particulier de la précédente, et correspond à $b = a$.

La solution de la question proposée s'obtiendra donc en faisant $b = a$ dans celle de la précédente, ce qui donnera

$$(a + x - y)^2 = 4ax.$$

90. 3e Exemple. — La droite MN (*fig.* 41) se meut de telle sorte, que le triangle AMN qu'elle détermine par ses intersections avec les lignes données AX, AY ait une aire constante; on demande la courbe à laquelle elle est constamment tangente.

Pour cela, il faudra d'abord déterminer la limite I du point où cette droite, dans une quelconque de ses positions, est rencontrée par une droite qui s'en approche indéfiniment, en satisfaisant constamment à la condition de l'aire invariable; et ce point I étant connu, pour une position quelconque de MN, on cherchera le lieu de ses points, pour toutes les positions de cette droite.

1°. Soit O l'intersection de la droite MN par une autre infiniment voisine M'N'.

Les deux triangles MOM', NON' seront équivalents, et comme ils ont l'angle égal O, on aura

$$MO.M'O = NO.N'O,$$

et passant à la limite,

$$\overline{MI}^2 = \overline{NI}^2.$$

Le point I est donc le milieu de MN.

2°. Pour avoir le lieu des points I relatifs à toutes les positions que prend MN, en supposant que le triangle AMN soit constant, ou que l'on ait $AM.AN = m^2$; soient x, y les coordonnées de I, on aura

$$AM = 2y, \quad AN = 2x,$$

et par suite

$$4xy = m^2 \quad \text{ou} \quad xy = \frac{m^2}{4}.$$

Le lieu est donc une hyperbole ayant pour asymptotes AX, AY.

91. 4e Exemple. — Une droite MN (*fig.* 42), qui a une longueur constante m, se meut de manière que ses extrémités restent sur les côtés d'un angle droit YAX; on demande la courbe à laquelle elle est toujours tangente.

Soit M'N' une position infiniment voisine de MN, ces lignes se coupent en O, et il s'agit de trouver la limite I de ce point. On la connaîtra si l'on détermine la limite du rapport $\frac{MO}{ON}$ qui ne sera autre que $\frac{MI}{IN}$.

Si de O, comme centre, on décrit les arcs de cercle M'H, NK, on aura $MH = KN'$, puisque $M'N' = MN$; et comme le rapport $\frac{MO}{ON}$ a évidemment la même limite que $\frac{HO}{ON}$, il suffit de connaître cette dernière qui est la même, d'après les triangles semblables, que celle du rapport des cordes M'H, NK. Or ce dernier est facile à obtenir au moyen des triangles rectilignes infiniment petits

MM'H, NN'K. Si l'on désigne leurs angles par la lettre du sommet, on aura

$$\frac{M'H}{MH} = \frac{\sin M}{\sin M'}, \quad \frac{NK}{KN'} = \frac{\sin N'}{\sin N},$$

d'où

$$M'H : NK :: \frac{\sin M}{\sin M'} : \frac{\sin N'}{\sin N}.$$

Mais les angles H et K ayant pour limite des angles droits, les limites de leurs angles aigus sont complémentaires. Ainsi la limite de M' est le complément de M; d'ailleurs la limite de N' est MNA; donc la limite de N sera complément de MNA. De sorte qu'en égalant les limites des rapports de la dernière proportion, on aura

$$\lim. \frac{M'H}{NK} = \frac{\tang M}{\tang MNA} = \tang^2 M;$$

donc

$$\frac{MI}{IN} = \frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2}.$$

Ceci donne une construction facile du point I; car si on abaisse de A une perpendiculaire AP sur MN, le rapport des deux segments NP, PM étant $\frac{\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2}$, sera égal à $\frac{MI}{IN}$ et, par conséquent, NI = MP; le point P détermine donc immédiatement le point I du lieu cherché.

L'équation précédente donne, en remarquant que $\overline{AN}^2 + \overline{AM}^2 = m^2$ et MI + IN = m,

$$MI = \frac{\overline{AN}^2}{m}, \quad NI = \frac{\overline{AM}^2}{m};$$

d'où il est facile de déduire les cordonnées x, y du point M, car on a

$$\frac{x}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{MI}}{m}, \quad \frac{y}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{NI}}{m};$$

donc

$$x = \frac{\overline{\mathrm{AN}}^3}{m^2}, \quad y = \frac{\overline{\mathrm{AM}}^3}{m^2},$$

et l'on aura l'équation entre x, y en éliminant AM, AN entre ces deux équations et la suivante $\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{AN}}^2 = m^2$. On trouve immédiatement

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}},$$

qui est l'équation du lieu demandé.

92. Il peut se faire que les considérations géométriques soient moins commodes que le calcul algébrique, et voici la marche qu'il faut suivre alors.

L'équation générale des droites données renferme un paramètre qui change de l'une à l'autre. Soit a ce paramètre; cette équation sera donc de la forme

$$y = x\mathrm{F}(a) + f(a),$$

F et f désignant des fonctions connues.

Changeant a en $a + h$, on aura l'équation d'une droite voisine, qui sera

$$y = x\mathrm{F}(a + h) + f(a + h);$$

l'abscisse du point de rencontre sera donc donnée par l'équation suivante :

$$x[\mathrm{F}(a + h) - \mathrm{F}(a)] + f(a + h) - f(a) = 0.$$

Il faut maintenant faire tendre h vers zéro et chercher

la limite de x; ce sera l'abscisse du point cherché, et l'équation de la droite fera connaître par suite l'ordonnée.

Mais si on laissait l'équation sous cette forme, elle n'apprendrait rien en prenant les limites de ces deux membres, puisqu'on ne trouverait autre chose que $0 = 0$. Le plus ordinairement il est facile de voir les réductions qui s'opèrent par les soustractions indiquées, et on reconnaît un facteur commun h à tous les termes; en le supprimant et passant aux limites des deux membres, on obtient alors la valeur limite de x. Mais rien n'est plus facile que de formuler le résultat en général. En effet, si l'on divise par h tous les termes de la dernière équation, et qu'on prenne ensuite les limites, on trouvera, d'après la définition de la notation des dérivées des fonctions,

$$xF'(a) + f'(a) = 0.$$

Cette équation jointe à la première $y = xF'(a) + F(a)$, détermine les deux coordonnées du point du lieu, et l'équation du lieu lui-même résultera de l'élimination de a entre ces deux équations. Si, pour la facilité des calculs, on ne réduisait pas à l'unité le coefficient de y, on aurait trois fonctions de a au lieu de deux, et l'on procéderait d'une manière tout à fait semblable.

Prenons, par exemple, le cas traité précédemment, où les droites mobiles jouissent de la propriété de déterminer sur les côtés d'un angle YAX des segments dont la somme soit égale à une constante a.

Si l'on désigne par α le segment de l'axe des x, l'autre sera $a - \alpha$, et l'équation générale des droites

$$\alpha y + (a - \alpha)x = \alpha(a - \alpha);$$

changeant α en $\alpha + h$, il vient, en retranchant les deux équations membre à membre,

$$yh - xh = ah - 2\alpha h - h^2,$$

ou, en divisant par h,

$$y - x = a - 2\alpha - h.$$

Cette équation, conjointement avec la première, détermine le point de rencontre qui varie avec h. On aura sa limite en supposant $h = 0$; ce qui réduit la seconde équation à

$$y - x = a - 2\alpha,$$

et l'on voit que c'est comme si l'on avait pris les dérivées par rapport à α de tous les termes de la première.

L'élimination du paramètre α entre ces deux équations donne l'équation suivante :

$$(a + x - y)^2 = 4ax,$$

qui est celle du lieu et coïncide avec celle qui a été trouvée dans le second exemple. Nous généraliserons ces théories par la suite; nous nous écarterions de notre objet en nous y arrêtant plus longtemps.

CHAPITRE XIV.

DE LA LONGUEUR DES LIGNES COURBES, ET DE L'AIRE DES SURFACES COURBES.

93. *Longueur des courbes.* — La notion de longueur est une de celles qui ne sont pas susceptibles de définition; mais, comme nous avons déjà eu plusieurs fois occasion de le dire, ce qu'il est toujours indispensable de définir, c'est l'égalité et l'addition des quantités que l'on considère, sans quoi elles ne pourraient donner lieu à aucune comparaison ni raisonnement précis.

L'égalité en géométrie se définit par la possibilité de la coïncidence. Il n'y a donc aucune difficulté à se faire idée de droites égales ou d'arcs égaux dans des cercles de même rayon. L'addition se faisant en portant les lignes à la suite les unes des autres dans des directions arbitraires, on conçoit ce que c'est qu'une ligne brisée double, triple d'une autre, et en général dans un rapport quelconque avec une autre ligne droite ou brisée. Il en est de même pour les arcs de cercles de même rayon, comparés entre eux.

Mais quand il s'agit de lignes courbes quelconques, l'égalité ne peut plus exister; la superposition étant impossible, il peut tout au plus y avoir *équivalence*. Mais qu'est-ce que deux arcs équivalents; et en particulier qu'est-ce que la longueur d'un arc de courbe rapportée à une ligne droite? La définition générale au moyen de laquelle la notion de longueur est ramenée au cas de la ligne droite, est la suivante :

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers

laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc, et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.

Mais il faut démontrer que cette limite existe et est unique, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de ce polygone tendent vers zéro. Nous pouvons supposer que l'arc soit convexe dans toute son étendue, c'est-à-dire ne puisse être coupé par une droite en plus de deux points. S'il en était autrement, on le partagerait en plusieurs parties séparément convexes : il en sera de même des polygones inscrits. Cette condition n'est nullement indispensable, mais elle facilite les raisonnements.

Cela posé, concevons d'abord qu'il n'y ait que deux cordes inscrites dans l'arc convexe que l'on considère; puis inscrivons-en deux dans chacune des deux subdivisions de cet arc, et de même deux dans chacune des nouvelles subdivisions, et ainsi de suite indéfiniment, de sorte que le nombre des côtés soit exprimé par la formule 2^n, n croissant indéfiniment. Le périmètre croîtra constamment; et comme on peut facilement assigner une quantité finie au-dessous de laquelle il reste toujours, il tendra évidemment vers une certaine limite. Il reste à démontrer que tout autre mode de division de l'arc conduirait à la même limite.

Considérons, en effet, deux polygones inscrits ayant les côtés extrêmement petits, l'un appartenant à la série que nous venons de désigner, et le second correspondant à toute autre loi d'inscription; menons des ordonnées par tous les sommets de l'un et de l'autre : les deux périmètres seront partagés par ces ordonnées en un même nombre de parties, et celles qui sont comprises entre deux ordonnées consécutives ont un rapport d'autant plus près de l'unité, que les côtés seront plus petits; car leurs directions différeront infiniment peu de celle de la tangente voisine. D'où

il suit que le rapport des deux périmètres tend indéfiniment vers l'unité à mesure que les côtés tendent vers zéro. La limite obtenue par le premier mode de subdivision est donc la même que pour tout autre.

Il est bon d'observer qu'on trouverait encore la même limite si les sommets du polygone n'étaient pas sur la courbe même, mais en étaient infiniment voisins, et que les côtés eussent toujours pour limites de leurs directions celles des tangentes aux points infiniment voisins. On pourrait encore considérer des polygones circonscrits à la courbe; on pourrait même prendre une suite de lignes séparées les unes des autres. Imaginons, par exemple, des parallèles qui coupent l'arc de courbe et soient infiniment voisines les unes des autres; si par chaque point de division on mène une tangente, la suite discontinue des portions de ces tangentes comprises entre le point de contact et la parallèle voisine aura, d'après les raisonnements précédents, la même limite que le périmètre inscrit. Ce procédé a été employé par Fermat. On trouverait encore bien d'autres manières de parvenir à la même limite par des sommes de lignes droites; la seule condition nécessaire est que ces sommes et les périmètres inscrits se composent d'éléments correspondants dont le rapport ait l'unité pour limite.

Remarque. — *Tout polygone circonscrit à un arc de courbe convexe est plus grand que cet arc.* Car si entre deux points de contact consécutifs quelconques on mène une tangente, il en résultera un polygone circonscrit d'un périmètre moindre que le précédent. En agissant de même pour ce nouveau polygone, et ainsi de suite indéfiniment, le périmètre de ces polygones va toujours en diminuant et a pour limite la longueur de l'arc. Donc cette longueur est moindre que celle du polygone circonscrit quelconque d'où l'on était parti. Un raisonnement analogue prouve

que *la longueur de l'arc est plus grande que celle de tout polygone inscrit.*

Il résulte de là que tout arc convexe est moindre qu'une ligne quelconque qui l'enveloppe, en partant des mêmes extrémités. Il suffit en effet de concevoir un polygone circonscrit au premier arc et ayant les côtés assez petits pour n'avoir aucun point commun avec le second et un polygone inscrit à celui-ci et qui enveloppe le premier. Ce dernier sera moindre que celui qui l'enveloppe, comme on le prouve dans la géométrie élémentaire; donc, à plus forte raison, l'arc inscrit sera moindre que l'arc circonscrit au plus grand polygone.

On verrait de la même manière qu'une courbe convexe fermée est moindre que toute ligne qui l'enveloppe.

Voici encore une remarque qui n'est pas sans utilité. Soient AB (*fig.* 43) un arc convexe quelconque, AC une droite menée de l'extrémité A et ayant même projection AP sur une ligne AU. Si toutes les tangentes de A en B forment avec AU des angles aigus plus petits que CAU, la longueur AC sera plus grande que celle de l'arc AB. En effet, si l'on conçoit un polygone circonscrit à AB et dont les points de contact extrêmes soient A et B, il sera plus grand que l'arc; mais il sera plus petit que AC, car si par tous les sommets on mène des parallèles à PBC, les parties de AC comprises entre ces parallèles seront plus grandes que les côtés correspondants du polygone qui font avec AU des angles aigus plus petits; la ligne AC est donc plus grande que l'arc AB.

On verrait semblablement que si les tangentes en tous les points de A en B, font avec AU des angles aigus plus grands que CAU, la droite AC′ sera plus petite que l'arc AB. Car on pourrait inscrire dans l'arc un polygone dont les côtés auraient des directions assez voisines de celles des tangentes pour que leurs angles avec AU fussent

plus grands que C′AU. Ce polygone serait alors plus grand que AC′, et, à plus forte raison, l'arc AB le serait aussi.

94. *Aire des surfaces courbes.* — Nous appellerons *aire d'une portion de surface courbe, la limite vers laquelle tend celle d'un polyèdre inscrit dont les faces sont infiniment petites dans tous les sens.*

Il est encore nécessaire de démontrer que cette limite existe, et est unique quelle que soit la figure des faces du polyèdre et la loi de leur décroissement.

Pour cela, il faut admettre la notion du plan tangent à une surface. On démontre dans la géométrie élémentaire que toutes les tangentes à une surface, menées par un quelconque de ses points, sont dans un même plan, et, par suite, que si par ce point et deux autres infiniment voisins pris sur la surface et non en ligne droite avec lui, on fait passer un plan, ce plan tend vers une limite déterminée à mesure que les deux points variables se rapprochent du premier; ce plan limite qui contient deux tangentes, et qui, par conséquent, ne diffère pas de celui qui est le lieu de toutes les tangentes, est ce qu'on nomme le *plan tangent*. Au reste, nous reviendrons plus tard sur ce point.

Cela posé, concevons deux polyèdres inscrits dont les faces aient des dimensions infiniment petites, l'un faisant partie de la première série de faces triangulaires, l'autre d'une série arbitraire. Si par tous les côtés de ces deux polyèdres on abaisse des plans perpendiculaires sur un même plan fixe, les faces se trouveront décomposées en parties planes ayant des projections égales sur le plan fixe et qui seront, par conséquent, entre elles en raison inverse des cosinus des angles que leurs plans forment avec le plan de projection. Mais ces plans font un très-

petit angle entre eux, puisqu'ils ont des directions très-voisines de celle d'un même plan tangent, et la limite de leur angle est zéro; donc la limite du rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux surfaces polyédriques est l'unité; donc si l'une des surfaces tend vers une limite, l'autre tendra vers la même.

95. Les mêmes raisonnements prouveraient que l'aire d'un polyèdre circonscrit dont les faces ont des dimensions tendant vers zéro a la même limite que les polyèdres inscrits. Et il n'est pas même nécessaire qu'il y ait continuité dans sa surface; on pourrait, par exemple, concevoir deux séries de plans parallèles infiniment voisins partageant la surface en parties infiniment petites dans tous les sens, puis par un point pris dans chacune de ces parties mener un plan tangent terminé aux quatre plans entre lesquels se trouve le point de contact. La surface discontinue formée par l'ensemble de ces parallélogrammes tangents aurait encore la même limite que toutes les précédentes, et l'on pourrait encore varier beaucoup la loi de ces surfaces sans cesser de trouver pour limite l'aire de la surface.

Il suffit donc de démontrer qu'au moyen de l'un de ces procédés, et en suivant une loi particulière, choisie à volonté, on tendrait vers une limite déterminée, pour qu'il soit établi que tout autre procédé et toute autre loi donneraient la même limite. Or c'est ce qu'il est facile de faire voir.

En effet, concevons un plan tel, qu'en y projetant la surface donnée il ne se trouve pas deux de ses points ayant même projection, ce qui est toujours possible en partageant, s'il le faut, cette surface en plusieurs portions. Supposons ensuite une série de plans parallèles entre eux, perpendiculaires au premier et distants les uns des autres

d'une quantité infiniment petite α, puis une seconde série de plans parallèles, distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite β, perpendiculaires au premier plan de projection ainsi qu'à ceux de la première série. La surface se trouvera décomposée en parties dont la projection sera égale à $\alpha\beta$; et si en un point d'une de ces parties on mène le plan tangent et qu'on désigne par ω l'angle qu'il fait avec le plan de projection, la partie de ce plan comprise entre les quatre plans infiniment voisins qui partent de la base $\alpha\beta$ aura pour mesure $\frac{\alpha\beta}{\cos\omega}$. Elle sera donc égale au volume d'un parallélipipède qui aurait même base $\alpha\beta$ et pour hauteur $\frac{1}{\cos\omega}$. Si donc à chaque point de la surface on fait correspondre sur la même ligne projetante un point ayant pour ordonnée $z = \frac{1}{\cos\omega}$, on engendrera ainsi une seconde surface dont la projection sera terminée au même contour. Le volume compris entre cette surface et le cylindre qui a pour base sa projection est, comme nous l'avons vu, la limite de la somme des parallélipipèdes $z\alpha\beta$, dont les bases $\alpha\beta$ sont prises dans toute l'étendue de la base du cylindre; ce volume peut donc être représenté par $\lim. \Sigma \frac{\alpha\beta}{\cos\omega}$, cette somme n'étant autre que celle qui se rapporte aux aires des parallélogrammes situés dans les plans tangents à la surface. Donc enfin celle-ci a une limite, comme nous nous proposions de le démontrer.

La définition que nous avons donnée de l'aire des surfaces courbes est donc indépendante de toute loi d'inscription ou de circonscription des faces planes, et conduit à une valeur unique et déterminée, exprimable en unités de surfaces comme les surfaces planes elles-mêmes.

Il est bon de remarquer qu'on trouverait encore la même limite si, au lieu de s'assujettir à prendre des faces planes, on prenait des surfaces courbes variables telles, que, pour les points situés sur une même ligne perpendiculaire au plan fixe de projection, les plans tangents à ces surfaces et à la proposée fissent entre eux des angles infiniment petits. Car les faces planes qu'on circonscrirait à ces surfaces, auraient un rapport aussi près de l'unité qu'on voudrait avec les parties de ces surfaces et de la proposée, correspondantes à la même projection sur le plan fixe : on trouverait donc encore la même limite pour leur somme.

Enfin on reconnaîtrait d'une manière analogue à ce qui a été fait pour les courbes, que toute surface convexe est plus petite qu'une surface qui l'enveloppe de toutes parts, ou qui l'enveloppe et est terminée au même contour.

Et de même une surface courbe est moindre qu'une surface plane ayant même projection orthogonale sur un plan, et faisant avec ce plan un angle aigu plus grand que tous ceux que font avec lui les plans tangents à la surface en tous ses points. L'inverse aurait lieu si tous ces derniers angles étaient au contraire plus grands que le premier.

96. *Arcs infiniment petits.* — Un arc qui tend vers zéro finit généralement par être constamment convexe; il est donc plus petit que la somme des tangentes menées à ses extrémités, et terminées à leur point de rencontre : d'ailleurs, il est plus grand que sa corde. Si donc on prouve que le rapport de cette corde à la somme des tangentes a pour limite l'unité, il en sera de même à plus forte raison du rapport de l'une ou l'autre de ces deux dernières quantités à la longueur de l'arc. Or, si du point de

rencontre ou abaisse une perpendiculaire sur la corde, le rapport de chacun de ses segments à la tangente correspondante étant le cosinus d'un angle infiniment petit, a pour limite l'unité. Il en est donc de même de la corde entière à la somme des tangentes. Donc,

On peut substituer à un arc infiniment petit d'une courbe quelconque, sa corde ou la somme des tangentes à ses extrémités, toutes les fois que cet arc est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite.

On peut encore substituer à l'arc une seule tangente à une de ses extrémités, pourvu qu'elle soit terminée à une droite passant par l'autre extrémité, et faisant avec la tangente un angle fini quelconque : car cette tangente et la corde étant les deux côtés d'un triangle, et comprenant un angle qui tend vers zéro, sont dans le rapport des sinus de deux angles finis qui tendent à être supplémentaires, la limite de leur rapport est donc celui de deux sinus finis égaux, c'est-à-dire l'unité.

97. *Arcs de cycloïde.* — Donnons un exemple simple de l'application de ces principes; et proposons-nous de mesurer un arc de cycloïde. Nous avons vu que la tangente au point M (*fig.* 11) est MU; soient α l'angle qu'elle fait avec DA' et $MK = y$. La partie de tangente comprise entre les deux ordonnées infiniment voisines MK, M'K' sera égale à $\frac{MH}{\cos\alpha}$.

Or on a

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a-y}}.$$

Pour rentrer dans les procédés employés précédemment

il faut introduire, au lieu de MH, la différence M'H de deux y consécutifs. Le triangle MM'H donne

$$MH = M'H \operatorname{tang} MM'H;$$

et comme la corde MM' fait un angle infiniment petit avec la tangente, l'angle MM'H diffère infiniment peu du complément de α, et tang MM'H de $\cot\alpha$. Si donc on remplace MH par M'H $\cot\alpha$, on ne l'aura altéré que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; il en sera donc de même pour $\frac{MH}{\cos\alpha}$, et la limite de la somme ne sera pas changée.

D'après les équations ci-dessus, on aura

$$M'H \cot\alpha = \frac{M'H\sqrt{2a-y}}{\sqrt{y}},$$

qui, divisée par $\cos\alpha$, donne

$$\frac{M'H\sqrt{2a}}{\sqrt{y}};$$

et l'arc, pris, par exemple, depuis le sommet D, sera la limite de la somme des expressions de cette forme dans lesquelles y passera par degrés infiniment petits M'H, de zéro à l'ordonnée de l'extrémité de l'arc à mesurer. Supposons que M soit cette extrémité; on aura donc

$$DM = \lim. \sqrt{2a}\, \Sigma\, M'H \,.\, y^{-\frac{1}{2}}$$

et, d'après une formule déjà plusieurs fois appliquée, on aura, en désignant par b l'ordonnée de l'extrémité M,

$$DM = 2\sqrt{2ab} = 2MU.$$

Lorsque le point M sera en A, on aura $MU = 2a$, et par

conséquent $AD = 4a$, et la longueur de la cycloïde entière ADB sera $8a$.

98. *Surfaces infiniment petites.* — Si l'on considère une surface courbe infiniment petite dans tous les sens et que, par tous les points de son contour, on mène des lignes perpendiculaires à un même plan, il vient d'être démontré que l'aire de cette portion de surface est moindre que celle de la portion du plan tangent faisant le plus grand angle aigu avec le plan de projection, et plus grande que celle du plan tangent faisant le plus petit angle, ces portions de plan étant déterminées par le cylindre projetant. Or ces deux aires planes, étant dans le rapport inverse des cosinus des angles que les deux plans tangents forment avec le plan de projection, ont pour limite de leur rapport l'unité; donc on peut prendre l'une ou l'autre, ou toute intermédiaire au lieu de l'aire de la surface infiniment petite, pourvu qu'elle soit un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite.

99. *Application à une surface de révolution.* — On coupera cette surface par des plans infiniment voisins perpendiculaires à l'axe, et à chacune des parties comprises entre deux plans consécutifs, on substituera la surface du tronc de cône engendré par la portion de tangente à la courbe génératrice, comprise entre les mêmes plans : cette substitution est permise d'après les principes précédents, parce que les plans tangents à ces deux surfaces, aux points ayant même projection, font toujours entre eux des angles infiniment petits. La surface du tronc de cône est le produit du côté par la circonférence décrite par son milieu; mais la limite de la somme ne sera pas altérée en prenant, au lieu du milieu, le point de contact lui-même qui en est infiniment voisin.

Si donc on désigne par A l'aire cherchée, par y l'ordonnée de la courbe génératrice, par τ la partie de la tangente comprise entre deux ordonnées infiniment voisines, on aura

$$A = 2\pi \lim. \Sigma y \tau.$$

Prenons pour exemple la cycloïde tournant autour de la tangente DA'. Nous avons trouvé tout à l'heure que la valeur de τ pouvait être considérée comme égale à $\frac{M'H\sqrt{2a}}{\sqrt{y}}$ à une quantité près infiniment petite par rapport à τ; donc on aura dans ce cas, en partant du sommet D,

$$A = 2\pi \lim. \Sigma \sqrt{2a}\sqrt{y}.M'H = \frac{2\pi\sqrt{2a}y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi y\sqrt{2ay},$$

y désignant l'ordonnée de l'extrémité de l'arc générateur.

CHAPITRE XV.

APPLICATIONS MÉCANIQUES.

100. *Vitesse.* — Dans un mouvement uniforme on appelle vitesse l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou le rapport d'un espace quelconque au temps employé à le parcourir.

Dans un mouvement varié continu, c'est-à-dire tel, que dans aucun intervalle de temps, si petit qu'il soit, il ne soit uniforme, on aperçoit facilement qu'il n'y a pas lieu à considérer utilement ce rapport; mais y a-t-il cependant dans un pareil mouvement quelque chose qui ait une telle analogie avec la vitesse dans le mouvement uniforme, et une telle similitude dans la manière de l'employer, qu'il soit convenable de lui appliquer la même dénomination et de généraliser ainsi le sens du mot *vitesse?*

Considérons un point qui se meuve d'une manière quelconque sur une courbe donnée, et supposons que la loi de son mouvement soit déterminée par la fonction $F(t)$ qui, pour une valeur quelconque du temps t, représente la longueur de l'arc AM (*fig.* 44) qui sépare le point M où le mobile se trouve à cette époque, d'une origine fixe A.

Après un certain temps h, il sera parvenu en un autre point N, et le rapport de l'espace parcouru au temps employé, ou $\frac{MN}{h}$, exprimera la vitesse moyenne avec laquelle cet arc a été décrit; c'est-à-dire que ce sera celle qu'il faudrait donner au mobile pour qu'il parcourût

d'un mouvement uniforme le même espace MN dans le même temps h.

Si maintenant on suppose que h diminue indéfiniment, la vitesse moyenne $\frac{MN}{h}$ ou

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h},$$

variera en même temps et tendra vers une certaine limite qui ne sera autre chose que la dérivée de $F(t)$ par rapport à t, et que nous appellerons la *vitesse* du mobile au point M.

Ainsi, dans tout mouvement d'un point, on appelle *vitesse* à un instant quelconque la limite de la vitesse moyenne du point dans un intervalle infiniment petit à partir de cet instant.

101. Si l'on désigne par v la vitesse, on aura

$$\lim. \frac{MN}{h} = v = F'(t);$$

d'où il suit que $\frac{MN}{h}$ diffère de v d'une quantité qui tend vers zéro en même temps que h. La désignant par ω, on aura donc

$$MN = vh + \omega h.$$

Donc, toutes les fois que MN devra être employé comme terme d'un rapport ou d'une somme dont on n'ait à considérer que la limite, on pourra supprimer le terme ωh, qui est infiniment petit par rapport à vh, et prendre vh comme mesure de l'espace MN parcouru dans le temps h; c'est-à-dire que dans tout mouvement varié l'espace parcouru est le produit de la vitesse par le temps, pourvu que ce temps soit infiniment petit. Ce que nous avons nommé vitesse joue donc le même rôle dans le mouvement varié que ce que l'on avait d'abord appelé

vitesse dans le mouvement uniforme, mais à la condition de ne considérer que des espaces infiniment petits.

Si donc on avait à calculer l'espace parcouru pendant un temps fini par un point mobile dont on connaîtrait la vitesse en fonction du temps, il suffirait de chercher la limite de la somme des produits des intervalles infiniment petits dans lesquels on décomposerait ce temps, par la vitesse positive ou négative au commencement de ces intervalles respectifs. Car ces produits ne différeraient des espaces réellement parcourus dans les intervalles correspondants, que de quantités infiniment petites par rapport à ces espaces mêmes.

C'est cette identité dans l'emploi de la vitesse, pourvu que les temps soient infiniment petits, qui justifie l'extension donnée au sens de ce mot, et non pas seulement le droit que l'on a en général de fixer arbitrairement le sens des mots que l'on introduit.

102. *Accélération.* — Pour ne pas entrer dans des détails trop spéciaux de mécanique, nous nous bornerons ici à considérer le mouvement varié rectiligne.

Le plus simple de tous les mouvements variés est celui où la vitesse augmente toujours de quantités égales dans des intervalles de temps égaux, quels qu'ils soient. Un pareil mouvement est dit *uniformément accéléré*, et l'on y donne le nom spécial d'accélération, à l'accroissement positif ou négatif de la vitesse dans l'unité de temps, ou au rapport d'un accroissement quelconque de la vitesse au temps employé à le produire.

Considérons maintenant un mouvement rectiligne varié, où la vitesse v est représentée par une fonction quelconque $\varphi(t)$ du temps. Soient h un accroissement infiniment petit donné à t; k l'accroissement correspondant de v. Concevons un mouvement uniformément

accéléré tel, que dans le même intervalle de temps h, il y aurait le même accroissement de vitesse k; $\frac{k}{h}$ sera l'accélération dans ce mouvement, ou l'accélération moyenne dans le mouvement réel considéré pendant l'intervalle h. La limite de cette accélération moyenne $\frac{k}{h}$, qui est la dérivée de v par rapport à t, est ce que l'on nomme l'*accélération* dans le mouvement donné, à l'instant que l'on considère.

103. Cela posé, $\frac{k}{h}$ ayant pour limite $\varphi'(t)$, on a, en désignant par ω une quantité infiniment petite,

$$\frac{k}{h} = \varphi'(t) + \omega,$$

d'où

$$k = h\varphi'(t) + h\omega.$$

Donc on peut remplacer k par $h\varphi'(t)$ lorsque k est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on considère la limite; et par conséquent l'accroissement k de la vitesse s'obtiendra comme dans le mouvement uniformément accéléré, en multipliant l'accélération par l'accroissement du temps, mais à la condition que cet accroissement sera infiniment petit.

On voit par là que l'accroissement de la vitesse dans un temps fini peut être considéré comme la limite de la somme des produits des parties infiniment petites de cet intervalle par les accélérations correspondantes. C'est ce que l'on exprime quelquefois en disant qu'un mouvement varié quelconque peut être considéré comme composé d'une infinité de mouvements uniformément variés.

Lorsque nous avons calculé au contraire l'accroissement de l'espace parcouru, le mouvement était considéré comme composé d'une infinité de mouvements uniformes.

Il eût été inutile, dans ce cas, de pousser l'approximation plus loin dans les éléments infiniment petits; la limite de la somme aurait été absolument la même.

104. *Poids spécifique et densité dans les substances non homogènes.*—On appelle *poids spécifique* d'une substance homogène son poids sous l'unité de volume, ou le rapport du poids d'un volume quelconque à ce volume. Supposons maintenant une substance non homogène, mais dont la nature varie d'une manière coutinue; et nous ferons consister cette continuité en ce que si l'on considère dans le corps deux volumes infiniment petits, égaux et infiniment voisins, le rapport du poids au volume variera infiniment peu de l'un à l'autre. Cela posé, nous appellerons *poids spécifique* en un point donné d'un corps non homogène, la limite du rapport du poids au volume d'une partie du corps renfermant ce point, et dont toutes les dimensions tendent indéfiniment vers zéro. Cette limite sera une fonction des trois coordonnées du point. On reconnaîtra facilement, par les mêmes considérations que dans les questions précédentes, qu'un volume infiniment petit du corps aura un poids qui ne différera que d'une quantité infiniment petite, par rapport à lui-même, du produit de ce volume par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points. Cette quantité pouvant être négligée sans erreur dans les résultats des questions qui ne dépendent que des limites des sommes ou des rapports, il s'ensuit que le poids spécifique, tel que nous l'avons défini, joue le même rôle dans le cas des corps non homogènes que le poids spécifique défini d'abord dans les corps homogènes; seulement, il ne faut l'appliquer qu'à des volumes infiniment petits dans tous les sens.

Ainsi, par exemple, pour avoir le poids total du corps, il suffira de chercher la limite de la somme des produits

des volumes infiniment petits dans tous les sens dans lesquels on décomposera le volume du corps, par le poids spécifique de la substance, en un point quelconque de la partie correspondant respectivement à chacun de ces éléments de volume. En substituant dans ce qui précède les masses au poids, il faudra substituer au poids spécifique la *densité*, et toutes les conséquences précédentes se reproduiront si identiquement, qu'il est inutile de s'y arrêter.

105. *Application aux centres de gravité des corps non homogènes.* — On suppose donnée la fonction des coordonnées qui exprime le poids spécifique en un point quelconque. Il suffira donc de décomposer le corps en éléments infiniment petits dans tous les sens, de prendre pour poids de chacun d'eux le produit de son volume par le poids spécifique rapporté à l'un quelconque de ses points ou à tout autre point infiniment voisin, lequel pourra aussi être pris comme s'il était le centre de gravité de l'élément lui-même. Il résultera de là, soit dans les poids, soit dans les moments de ces éléments, des erreurs infiniment petites par rapport aux poids et aux moments exacts, et par conséquent la limite de la somme des poids sera le poids même du corps, et la limite de la somme des moments, par rapport à un plan quelconque, sera exactement égale au moment de la résultante. Les trois coordonnées du centre de gravité du corps seront donc encore déterminées par des limites de sommes d'infiniment petits. Seulement il faut remarquer que dans le cas des corps homogènes, nous avons pu les décomposer en éléments infiniment petits dans deux sens seulement, tandis que les corps non homogènes doivent être décomposés en éléments infiniment petits dans tous les sens.

CHAPITRE XVI.

REMARQUES ET THÉORÈMES PROPRES A FACILITER L'EMPLOI DES INFINIMENT PETITS.

106. *Des termes que l'on peut négliger dans les équations.* — Lorsque les deux membres d'une équation ont des limites finies et que ce sont ces limites que l'on a à considérer, on peut évidemment se dispenser de tenir compte des termes dont la limite est zéro, quoiqu'en les supprimant l'équation devienne inexacte. Comme on ne cherche que l'équation aux limites et qu'elle n'est pas altérée par là, les résultats sont exactement les mêmes, et l'on s'est débarrassé quelquefois d'une multitude de termes très-compliqués. Ainsi *toute suppression ou altération quelconque qui n'a d'autre effet que de faire négliger des termes infiniment petits dans une équation finale dont les deux membres ont des limites finies, peut être faite sans aucune erreur dans les résultats.*

107. Si les membres d'une équation avaient des limites égales à zéro, et se composaient d'infiniment petits de différents ordres, par exemple du premier et d'ordres supérieurs, on peut, par la même raison, se borner à écrire les termes du premier ordre. En effet, une équation dont les deux membres ont pour limite zéro n'est pas destinée à rester sous cette forme, puisqu'elle conduirait à l'égalité insignifiante $0 = 0$. On conserve souvent cette forme pour la commodité de l'écriture, mais on doit toujours en revenir aux quantités finies. Si c'est en divisant les

deux membres par un infiniment petit du premier ordre, les termes d'ordre supérieur au premier conduiront à la limite zéro, ceux du premier à des limites finies, et l'on se retrouve dans le cas précédent. Si cette équation est employée pour donner l'expression d'un infiniment petit au moyen des autres, et que cet infiniment petit doive être un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite, on sait qu'on peut l'altérer, sans erreur dans les résultats, de quantités infiniment petites par rapport à lui-même. On a donc le droit de négliger, dans l'équation d'où l'on tire sa valeur, tous les termes d'un ordre supérieur au sien.

Il est évident que dans cette même équation on peut, au lieu des facteurs infiniment petits du premier ordre, substituer d'autres quantités dont le rapport avec eux ait pour limite l'unité, ou en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux; car ce n'est qu'ajouter ou supprimer dans les membres de l'équation des termes d'ordre supérieur au premier.

Ces raisonnements s'appliquent également aux équations dont l'ordre le moins élevé est supérieur au premier. On peut généralement se dispenser d'écrire ceux d'un ordre plus élevé que le moindre.

Remarque. — Il y a cependant une attention à avoir : il peut arriver que dans une équation non simplifiée il y ait des termes du premier ordre et d'ordres supérieurs, et qu'après avoir exécuté les opérations indiquées ceux du premier ordre se détruisent entre eux. Dans ce cas, si l'on a négligé des termes du second ordre, et que pour employer l'équation résultante on divise ses deux termes par un infiniment petit du second ordre, afin de ne pas arriver à $0 = 0$; ou que l'on tire de cette équation la valeur d'un infiniment petit du second ordre, qui doit entrer comme terme d'un rapport ayant une limite finie, il est évident

que les résultats sont inexacts, puisque les termes supprimés y auraient introduit des quantités finies.

Si, par exemple, on avait l'équation suivante, dans laquelle h et k désignent des quantités infiniment petites du premier ordre,

$$\sin(x+h) - \sin x + \cos(y+k) - \cos y$$
$$+ k\sin y - h\cos x + \mathrm{A}k^2 + \mathrm{B}hk + \mathrm{C}h^2 = 0,$$

et que dans les calculs précédents on eût négligé des termes qui feraient disparaître $\mathrm{A}k^2$, il y aurait erreur dans les résultats si l'on se servait de cette équation pour en tirer la valeur de h ou de k et la substituer dans une autre. Cela tient à ce que, non-seulement les quantités finies disparaissent de l'équation, mais en groupant convenablement les termes on reconnaît que tous les termes sont du second ordre et que, par conséquent, on n'avait pas le droit de négliger $\mathrm{A}k^2$.

En effet,

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(y+k) - \cos y = -2\sin\frac{k}{2}\sin\left(y+\frac{k}{2}\right);$$

donc

$$\sin(x+h) - \sin x - h\cos x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) - h\cos x.$$

Mais, puisque $\sin\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$ ont pour limite de leur rapport l'unité, leur différence est infiniment petite par rapport à l'un quelconque des deux; donc, en désignant par ω une quantité infiniment petite, on a

$$\sin\frac{h}{2} = \frac{h}{2} + \omega h,$$

et, d'après ce qu'on a vu dans la trigonométrie élémen-

taire, ω est du second ordre; de plus, $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ diffère de $\cos x$ d'une quantité infiniment petite du premier ordre, d'après le théorème général (n° 71); en la désignant par α, on peut poser

$$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x+\alpha;$$

donc

$$2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=2\left(\frac{h}{2}+\omega h\right)(\cos x+\alpha)$$
$$=h\cos x+2\omega h\cos x+h\alpha+2\omega h\alpha.$$

En en retranchant $h\cos x$, il reste donc des produits de deux ou de trois infiniment petits, dont le plus grand est du second ordre. Il en serait de même de l'ensemble des trois termes

$$\cos(y+k)-\cos y+k\sin y.$$

Le premier membre de l'équation pouvant ainsi être considéré comme composé de termes du second ordre et d'ordres supérieurs, si l'on néglige des termes du second ordre, qu'on divise ensuite par h^2, ou par tout autre infiniment petit du second ordre, et qu'on passe aux limites, on aura une équation fausse, puisqu'il manquera des termes finis. Et, par la même raison, on n'aurait pu l'employer à donner la valeur d'une des quantités qui y entrent.

Triangles infiniment petits.

108. 1°. Supposons un triangle ABC dont les trois angles tendent vers les limites α, β, γ et les trois côtés a, b, c vers zéro. Les rapports des côtés auront pour limites les rapports des sinus des angles α, β, γ.

Ainsi, par exemple, on a les équations exactes

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \lim. \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Mais il n'y a aucun inconvénient à écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{ou} \quad a = b\,\frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

si a est un terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherche la limite; car $\frac{a}{b}$ ayant pour limite $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ en diffère d'une quantité infiniment petite ω et l'on a

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \omega \quad \text{ou} \quad a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} + b\omega.$$

Ainsi en prenant, au lieu de a, la partie $\frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}$, on néglige une quantité infiniment petite par rapport à a, ce qui, dans la question supposée, ne donnera aucune erreur dans les résultats.

Or il y a souvent beaucoup d'avantage à introduire ainsi les angles limites aux angles variables, comme nous le verrons par quelques exemples.

2°. Dans un triangle ABC dont l'angle A tend vers un angle droit et les côtés vers zéro, on peut calculer le côté c par la formule

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

au lieu de la formule exacte

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Car cos A tend vers zéro, donc $2\,bc \cos A$ est infiniment petit par rapport à $2\,bc$, et, à plus forte raison, par rapport à $b^2 + c^2$, qui est toujours plus grand que $2\,bc$.

Ainsi a^2 diffère de $b^2 + c^2$ d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même; ou encore $\frac{a^2}{b^2 + c^2}$ a pour limite l'unité.

D'où il suit que $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ a aussi pour limite l'unité, ainsi que toutes les puissances de ce rapport.

On pourra donc substituer $\sqrt{b^2 + c^2}$ à a toutes les fois que cette quantité sera un terme d'un rapport ou d'une somme dont on n'a à considérer que la limite.

109. *Ordre infinitésimal de diverses lignes qu'on a souvent à considérer dans un triangle rectangle infiniment petit.*

Soient A (*fig.* 45) l'angle droit du triangle ABC, dont le côté AB ou c est infiniment petit du premier ordre, ainsi que l'angle B; AI la perpendiculaire abaissée de A sur l'hypoténuse. On aura

$$AC = c \tang B, \quad AI = c \sin B, \quad CI = c \sin B \tang B,$$

et comme sin B et tang B sont du même ordre que B, puisque leur rapport à B a une limite non-seulement finie, mais encore égale à l'unité, il en résulte que AC et AI sont infiniment petits du second ordre, et IC du troisième.

Calculons maintenant la différence de l'hypoténuse au côté adjacent à l'angle infiniment petit,

$$BC - BA = \frac{c}{\cos B} - c = \frac{2c \sin^2 \frac{B}{2}}{\cos B},$$

et comme $\sin \frac{B}{2}$ est du premier ordre, ainsi que c, il s'ensuit que BC — BA est du troisième.

Le segment CI étant aussi du troisième, on peut se proposer de trouver la limite de son rapport à BC — BA.

D'après les formules précédentes, ce rapport a pour valeur $\frac{\sin^2 B}{2\sin^2 \frac{B}{2}}$. Mais la limite ne sera pas changée en substituant à chacun de ces sinus l'arc correspondant dont le rapport à ce sinus est l'unité; on trouve ainsi 2 pour limite de $\frac{CI}{CB - AB}$; de sorte que si l'on décrit de B comme centre l'arc AH, $\frac{CH}{CI}$ tend indéfiniment vers $\frac{1}{2}$; et le point H peut être regardé comme le milieu de CI, à une quantité près infiniment petite par rapport à CI.

110. *Triangle infiniment petit ayant un côté infiniment petit par rapport à un autre.*—Soit BC (*fig.* 46) infiniment petit par rapport à AB; en abaissant BI perpendiculaire sur AC, $\frac{BI}{AB}$ ou sin A sera plus petit que $\frac{BC}{BA}$ qui, par hypothèse, est infiniment petit; il en sera donc de même de sin A, et par suite de l'angle A.

Quant au rapport $\frac{AC}{AB}$, il a nécessairement pour limite l'unité, puisque la différence de ses deux termes est moindre que le troisième côté BC, et que, par hypothèse, ce dernier est infiniment petit par rapport à l'un des deux.

Corollaire. — L'angle CAB ayant pour limite zéro, il s'ensuit que si l'un de ses côtés tend vers une direction limite, soit que A reste fixe, soit qu'il se déplace, l'autre aura pour limite la même direction.

Et plus généralement, si par un mouvement quelconque, deux points A et B (*fig.* 47) se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, de manière que la direction AB tende à être parallèle à une certaine droite fixe; que l'on considère deux points A′, B′ dont les distances respectives à

A et B soient infiniment petites par rapport à AB : la direction A'B' tendra vers la même limite que AB. En effet, il a été prouvé que l'angle B'AB a pour limite zéro, puisque $\frac{B'B}{AB}$ est infiniment petit ; que, de plus, $\frac{AB'}{AB}$ a pour limite l'unité. De là résulte que $\frac{A'A}{AB'}$ est infiniment petit, puisque, par hypothèse, $\frac{A'A}{AB}$ l'est ; donc l'angle A'B'A est infiniment petit : donc, enfin, les droites A'B', AB font entre elles un angle dont la limite est zéro, et par conséquent leurs directions ont la même limite. Cette proposition a des applications assez fréquentes.

111. *Triangle ayant deux angles infiniment petits du premier ordre.* — Soient A et B (*fig.* 48) les deux angles infiniment petits ; abaissons CI perpendiculaire sur AB ; et cherchons d'abord quelle serait la limite de la position du point C, qui est la même évidemment que celle du point I, si on laissait AB invariable pendant que les angles tendraient vers zéro.

Or on a

$$\frac{AI}{IB} = \frac{\text{tang } B}{\text{tang } A};$$

donc

$$\lim. \frac{AI}{IB} = \lim. \frac{\text{tang } B}{\text{tang } A} = \lim. \frac{B}{A}.$$

Si donc on connaît la limite du rapport des deux angles infiniment petits du même ordre, on aura la limite du sommet C, en partageant AB en raison inverse des angles en A et B.

Supposons maintenant que le côté AB soit lui-même infiniment petit du premier ordre, et proposons-nous d'évaluer la différence entre sa longueur et la somme des deux autres côtés.

Or on a

$$AC - AI = \frac{2\,AI \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos A} \quad \text{et} \quad BC - BI = \frac{2\,BI \sin^2 \frac{B}{2}}{\cos B},$$

et la somme de ces deux différences est la différence cherchée. Mais chacune d'elles est un infiniment petit du troisième ordre au moins, puisque AI et BI sont moindres que AB qui est du premier ordre, et que $\sin^2 \frac{A}{2}$ et $\sin^2 \frac{B}{2}$ sont du second ordre. On peut même dire qu'elles sont précisément du troisième ordre toutes deux, dans le cas supposé où A et B sont du même ordre; car alors les deux segments AI et IB sont dans un rapport fini avec AB, et sont par conséquent du premier ordre. *Il résulte de là que la différence entre* AB *et* AC + CB *est un infiniment petit du troisième ordre au moins.*

Ou, en d'autres termes, cette différence est du même ordre que le cube de l'arc.

L'ordre de cette différence s'élèverait si les angles étaient d'un ordre plus élevé que le côté.

112. *Triangle ayant un angle infiniment petit du premier ordre, compris entre deux côtés infiniment petits du premier ordre.* — Soit A (*fig.* 49) l'angle donné; la somme des deux autres a pour limite deux droits. On peut maintenant faire plusieurs suppositions sur les deux côtés donnés.

Si la limite de leur rapport est finie et différente de l'unité, l'un des angles opposés tendra nécessairement vers zéro, l'autre vers deux droits. Car, sans cela, le rapport limite de leurs sinus serait nécessairement l'unité, contrairement à la supposition.

Supposons maintenant que la limite de leur rapport soit l'unité. Il peut alors se présenter trois cas.

1°. Si leur différence est du second ordre, prenons $AB' = AB$; $B'C$ sera du second ordre. Mais BB' est du second ordre à cause du triangle isocèle ABB' qui donne $BB' = 2\,AB \sin \frac{A}{2}$; ainsi BC sera du second ordre, et le rapport $\frac{B'C}{BC}$ a une limite finie quelconque. Or l'angle B' tend vers un angle droit; donc l'angle $B'BC$, et par suite C, a une limite finie qui peut être quelconque et dépend du rapport de CB' à BB'.

2°. Supposons que leur différence soit d'un ordre compris entre 1 et 2. Alors BB' étant du second ordre, $B'C$ d'un ordre moindre, et BC le plus grand côté du triangle $BB'C$, comme opposé à l'angle obtus B'; il s'ensuit que BC est du même ordre que $B'C$, et même que leur rapport a pour limite l'unité, puisque leur différence, étant moindre que BB', qui est du second ordre, est infiniment petite par rapport à ces lignes mêmes. Le rapport $\frac{BB'}{B'C}$, ayant zéro pour limite, l'angle C tendra vers zéro, et, par suite, l'angle ABC vers deux droits.

3°. Soit la différence d'un ordre supérieur à 2. Alors $\frac{B'C}{BB'}$ a pour limite zéro; donc l'angle $B'BC$ a zéro pour limite et l'angle ABC a la même limite que ABB', ou un droit: il en est de même par suite de l'angle C.

Si l'angle A était d'un ordre quelconque m au lieu d'être du premier comme les côtés, il faudrait, dans ce qui précède, substituer $1 + m$ à 2.

Remarque. — Il est bon de remarquer que dans ces trois cas, c'est-à-dire *toutes les fois que le rapport des deux côtés donnés a pour limite l'unité, le troisième est infiniment petit par rapport aux deux autres.*

CHAPITRE XVII.

COURBURE DES ARCS DE COURBES PLANES QUELCONQUES, ET DIVERSES PROPOSITIONS QUI S'Y RAPPORTENT.

113. La courbure d'un arc convexe est l'angle que forment entre elles les directions du premier et du dernier élément de cet arc; c'est l'angle des tangentes extrêmes : il exprime la quantité dont la courbe a successivement dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc. Si cet angle variait proportionnellement à l'arc, on aurait la courbure, pour une unité de longueur, en divisant celle d'un arc quelconque par la longueur de cet arc.

Mais dans une courbe quelconque, si l'on divise cet angle par la longueur de l'arc, on aura seulement la courbure moyenne de cet arc, rapportée à l'unité de longueur, c'est-à-dire celle que l'on trouverait pour un arc égal à l'unité, si la courbure variait proportionnellement à l'arc, comme dans le cercle, et de manière à obtenir la courbure donnée pour une longueur égale à celle de l'arc dont il s'agit.

Cela posé, si, à partir d'un point quelconque d'une ligne courbe, on prend un arc de grandeur arbitraire, sa courbure moyenne variera à mesure que cet arc diminuera indéfiniment; et elle tendra vers une limite déterminée, qu'on appelle *courbure de la ligne* au point que l'on considère. Cette limite est, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, la courbure d'un arc infiniment petit, rapportée à l'unité de longueur, cet arc commençant au point que l'on considère. C'est une no-

tion importante dans l'étude approfondie de la constitution d'une courbe.

114. Si l'on considère l'inclinaison φ de la tangente sur un axe fixe, comme une fonction de l'arc s pris à partir d'un point fixe quelconque de la courbe, la courbure ω d'un arc h n'est autre chose que l'accroissement de la fonction φ correspondant à l'accroissement h de l'arc s; on a donc

$$\omega = \mathrm{M}\,h,$$

M étant une quantité finie dépendant de la valeur de s relative à la première extrémité de l'arc et de sa longueur h.

Et de même pour une fonction quelconque, si l'on changeait s en $s + h_1$, et qu'on désignât par ω_1 l'accroissement correspondant de ω, on aurait

$$\omega_1 = \mathrm{M}_1\,hh_1.$$

Si $h_1 = h$, on a

$$\omega_1 = \mathrm{M}_1\,h^2,$$

et il en serait de même pour les accroissements d'ordre plus élevé, comme nous l'avons vu en général pour toutes les fonctions (n° 74).

115. Dans un cercle, la courbure d'un arc quelconque s'obtiendrait en multipliant celle d'un arc égal à l'unité par la longueur de l'arc donné. Dans une courbe quelconque, il n'en sera plus ainsi évidemment; mais si l'on ne considère qu'un arc infiniment petit, le produit de la courbure, en une de ses extrémités, par sa longueur, en donnera la courbure à une quantité près, infiniment petite par rapport à elle, puisque le rapport de la courbure exacte de cet arc à l'arc même ne diffère que d'une quantité infiniment petite de la limite que nous appelons courbure en un point. De sorte que si cette courbure d'un arc infiniment petit ne doit être considérée que comme élément d'une somme dont on cherche la limite, il n'y

aura aucune erreur dans le résultat; et par conséquent, dans la recherche de la courbure d'un arc fini, d'une courbe quelconque, on peut agir de la même manière que si c'était un cercle, pourvu qu'on partage cet arc en parties infiniment petites, et que pour chacune d'elles on prenne pour courbure de l'unité de longueur la *courbure* en un quelconque de ses points.

116. Le cercle ayant une courbure constante, il est naturel de le prendre pour terme de comparaison, et de faire connaître la courbure d'une ligne en un de ses points, en donnant le rayon du cercle dont la courbure est la même. Ce cercle se nomme *cercle de courbure*, et son rayon, *rayon de courbure*. Si on le place tangentiellement à la courbe au point que l'on considère, en tournant sa concavité du même côté qu'elle, son centre, considéré relativement à ce point de la courbe, prend le nom de *centre de courbure*.

La courbure d'un cercle en un de ses points, ou la courbure d'un arc de ce cercle égal à l'unité étant le rapport de l'angle de ses tangentes extrêmes ou de ses normales extrêmes à la longueur même de cet arc, sera égal l'unité divisée par le rayon du cercle, puisque nous appelons angle le rapport de l'arc au rayon. Il s'ensuit donc que *la courbure d'une ligne quelconque, en un de ses points, est égale à l'unité divisée par le rayon de courbure en ce point.*

117. *Le centre de courbure est la limite du point de rencontre de deux normales infiniment voisines.* — Soient, en effet, M (*fig.* 50) un point quelconque d'une courbe, MT la tangente, M'N la tangente au point infiniment voisin M', O le point de rencontre des normales en M, M'. Les quatre points M, N, M', O seront sur un cercle ayant pour diamètre NO, dont la limite est la même que celle de MO ou M'O. L'arc de ce cercle compris entre M et M'

diffère de sa corde, et, par suite, de l'arc MM′ de la courbe, d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même ; on pourra donc le remplacer par ce dernier, sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports.

Mais l'angle inscrit MOM′ est égal à l'arc de cercle intercepté divisé par le diamètre : il est d'ailleurs égal à TNM′. Donc $\frac{\text{TNM}'}{\text{arc MNM}'} = \frac{1}{\text{NO}}$, l'arc MNM′ étant celui du cercle. Le remplaçant par l'arc MM′ de la courbe, on aura, en passant aux limites,

$$\lim. \frac{\text{TNM}'}{\text{MM}'} = \frac{1}{\lim. \text{NO}} = \frac{1}{\lim. \text{MO}}.$$

Mais $\lim. \frac{\text{TNM}'}{\text{MM}'}$ étant la courbure en M est égale à l'unité divisée par le rayon de courbure.

On voit donc que la limite de MO est égale au rayon de courbure ; et le *centre de courbure en un point quelconque est la limite du point de rencontre de la normale en ce point avec la normale infiniment voisine.*

118. *Les courbures des deux moitiés d'un arc infiniment petit de premier ordre, ne peuvent différer que d'un infiniment petit du second.* — Car si h désigne la longueur de cet arc et ω', ω'' les courbures des deux moitiés, on aura

$$\omega' = \text{M}\frac{h}{2},$$

M étant une quantité finie. Mais ω'' n'étant autre chose que la valeur que prend ω' quand on change dans M, s en $s + \frac{h}{2}$, on aura, par ce qui précède,

$$\omega'' - \omega' = \text{M}'.\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

M′ étant une quantité finie. On voit donc que les courbures des deux moitiés d'un arc infiniment petit du premier ordre ne peuvent différer que d'un infiniment petit du deuxième ordre.

119. *La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du même ordre que le cube de l'arc.* — En effet, l'arc étant compris entre la corde et la somme des tangentes extrêmes, diffère de l'une ou de l'autre de ces deux quantités, moins qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre.

Or les angles de la corde avec chacune des tangentes étant moindres que celui des tangentes entre elles, lequel est du même ordre que l'arc, sont au moins de cet ordre infinitésimal. On a donc un triangle dont un côté est infiniment petit, et les angles adjacents sont du même ordre au moins que ce côté; d'où il suit (n° 111) que la différence de ce côté à la somme des deux autres est au moins du même ordre que le cube du côté, ou de l'arc qui est du même ordre que le côté. Il en est donc ainsi, à plus forte raison, de la différence de l'arc à la corde ou à la somme des tangentes. Ces différences seront du troisième ordre, si l'arc est du premier.

120. *La différence d'un arc infiniment petit à la tangente menée à l'une des extrémités de l'arc et terminée à l'ordonnée menée par l'autre, est de l'ordre du carré de l'arc.*

Soit l'arc MM′ (*fig.* 51), MT sa tangente terminée à l'ordonnée P′M′; il s'agit d'évaluer l'ordre infinitésimal de la différence entre MT et cet arc.

Remarquons d'abord en général que *la portion* M′T *de l'ordonnée est du second ordre.* Car on a la proportion

$$\frac{M'T}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin T}; \quad \text{d'où} \quad M'T = \frac{MM' \sin M}{\sin T}.$$

Mais nous avons vu que l'angle M est au moins du même

ordre que l'arc ou la corde MM′ et sin T est fini; *donc la partie* M′T *d'une sécante quelconque faisant un angle fini avec la tangente est de l'ordre du carré de* MM′ *ou de l'arc proposé.*

Si maintenant on abaisse M′I perpendiculaire sur MT, MI différera de l'hypoténuse MM′ d'un infiniment petit de l'ordre du cube de MM′ au moins (n° 109), de plus IT est de l'ordre du carré de MM′, puisqu'on a

$$IT = M'T \cos T,$$

et IT, étant la différence de MT à MI, est la différence de MT à l'arc MM′ en négligeant un infiniment petit de l'ordre du cube de MM′; d'où il suit, comme nous l'avons annoncé, que cette dernière différence est de l'ordre du carré de l'arc. Elle sera donc du second ordre si l'on prend l'arc du premier.

Il en serait de même pour la tangente menée au point M′ et terminée à l'ordonnée MP. L'une de ces tangentes est plus grande que l'arc, l'autre plus petite.

121. Remarque. — On peut conclure de ce qui précède que les longueurs des deux normales en M, M′ terminées à leur point de rencontre O diffèrent d'une quantité qui est au moins du second ordre. Car cette différence est la partie d'une de ces normales, comprise entre le point M′ et le cercle décrit de O comme centre avec OM pour rayon. Or ce cercle étant tangent à la courbe en M, il suffit d'appliquer la proposition qui vient d'être démontrée sur M′T. La différence des normales est donc au moins du second ordre. Nous pourrions pousser l'appréciation plus loin.

On peut tirer de là une conclusion qui a quelquefois de l'utilité dans les problèmes de géométrie : c'est qu'une courbe dont les normales passent toutes par un même point, est nécessairement un cercle. En effet, en parta-

geant un arc fini de la courbe en parties infiniment petites du premier ordre, les accroissements successifs des normales, comptées à partir du point constant de leur rencontre, seront du second ordre, et la limite du rapport de la somme de ces accroissements à la somme des arcs sera zéro. Donc l'accroissement total de la normale est nul, et tous les points du lieu sont également distants du point fixe. Ce lieu est donc un cercle, dont le point fixe est le centre.

122. Considérons un arc infiniment petit a, appartenant à une courbe quelconque, dont les arcs pris à partir d'une origine fixe sont désignés par s; partageons-le en parties égales α, infiniment petites du second ordre, si a est regardé comme du premier; ce qui veut dire que $\frac{\alpha}{a^2}$ tend vers une limite finie, lorsque a tend vers zéro. Désignons par ω la courbure d'un quelconque de ces arcs α, on aura (n° 114)

$$\omega = M\alpha,$$

M désignant une quantité finie.

Comparons maintenant les valeurs extrêmes ω', ω'' de ω. Pour avoir ω' il faudra, dans M, mettre pour s la valeur correspondante à la première extrémité; pour avoir ω'' il faudra changer s en $s+h$, h n'étant autre chose que $a-\alpha$, et par conséquent du premier ordre. M croîtra donc d'une quantité du premier ordre, que l'on pourra désigner par $M_1 a$, M_1 restant fini; d'où il suit

$$\omega'' - \omega' = M_1 \alpha a.$$

Ainsi *la différence des courbures des arcs extrêmes α est du troisième ordre.*

123. *Expression de la perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit sur la tangente menée à l'autre extrémité.*

Soit OB (*fig.* 52) la tangente à l'extrémité O de l'arc OA $= a$ infiniment petit du premier ordre, et AB la perpendiculaire, dont nous allons chercher l'expression en fonction de la longueur a de l'arc et de sa courbure Ω, en nous assujettissant à ne négliger que les infiniment petits du troisième ordre. Pour cela nous décomposerons a en parties égales α infiniment petites du second ordre, dont le nombre m croîtra indéfiniment à mesure que a tendra vers zéro.

La relation

$$a = m\alpha$$

donne

$$\frac{1}{m} = \frac{\alpha}{a}, \quad \text{ou} \quad m = \frac{a}{\alpha};$$

de sorte que $\frac{1}{m}$ est infiniment petit du premier ordre, et am ou $\frac{a^2}{\alpha}$ est une quantité finie.

Cela posé, soit MN un quelconque des arcs α qui composent OA, et correspondant à OM $= n\alpha$; formons le triangle MNI au moyen de la corde MN, de la parallèle MI à OB et de la perpendiculaire NI; AB sera la somme des m valeurs que prendra NI quand n prendra les m valeurs $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$.

C'est-à-dire que l'on aura

$$\text{AB} = \Sigma\, \text{MN} \sin \text{NMI},$$

cette somme se rapportant aux m arcs égaux qui composent OA. Remarquons d'abord que, si dans l'expression générale de l'élément MN sin NMI, on considère un terme infiniment petit de l'ordre p, il fournira dans la somme un terme de l'ordre $p-1$. En effet, on peut le représenter par $\text{K}a^p$, K étant une quantité finie variable. La somme des m valeurs qu'il prend est égale à la somme des facteurs a^p multipliée par une moyenne K, entre les premiers fac-

teurs k, c'est-à-dire à $mK_1 a^p$. Ce qui est évidemment de l'ordre $p-1$, puisque ma est une quantité finie. Procédons maintenant au calcul de la somme en question, en négligeant dans sa valeur totale les quantités infiniment petites du troisième ordre.

Nous voyons d'abord qu'à ce degré d'approximation nous pouvons substituer l'arc α à sa corde MN, car leur différence est de l'ordre de α^3; c'est-à-dire du sixième, puisque α est du second : et comme l'angle NMI est moindre que l'angle α que la tangente en M fait avec OB, augmenté de la courbure ω de MN, et à plus forte raison moindre que Ω qui est du premier ordre, on voit qu'en prenant α au lieu de la corde MN, on néglige dans l'expression générale de NI une quantité du septième ordre, au moins. Or, d'après la remarque précédente, elle ne pourra donner dans la somme qu'une quantité du sixième ordre : on peut donc la négliger au degré d'approximation que nous nous sommes proposé, et prendre pour valeur de AB l'expression

$$\Sigma\, \alpha \sin \mathrm{NMI}.$$

On peut encore la simplifier en remplaçant sin NMI par l'angle NMI; car leur différence étant du troisième ordre, son produit par α sera du cinquième, ce qui ne produirait sur AB qu'une erreur du quatrième. Donc nous pouvons prendre pour NI l'expression plus simple

$$\alpha . \mathrm{NMI}.$$

Et même nous pouvons remplacer NMI par φ dont il diffère d'un angle moindre que la courbure de MN qui est du second ordre; car nous négligeons ainsi dans α. NMI une quantité du quatrième ordre qui ne pourrait affecter AB que d'une erreur du troisième ordre, que nous devons

négliger. Ainsi, au degré d'approximation demandé, nous pouvons prendre

$$AB = \Sigma \varphi \alpha.$$

Il faut maintenant exprimer φ au moyen de l'arc $OM = n\alpha$, afin de pouvoir effectuer cette sommation.

Cet angle φ n'est autre chose que la somme des courbures ω des n premiers arcs α; et si elles étaient toutes égales à la courbure ω' du premier, φ serait égale à $n\omega'$. Or il est facile de voir qu'on peut les considérer ainsi, au degré d'approximation demandé.

En effet, d'après le n° 122, une quelconque des différences $\omega - \omega'$ est un infiniment petit du troisième ordre. Ainsi la différence de φ à $n\omega'$ est égale à n quantités du troisième ordre, et peut se mettre sous la forme Ana^3, A étant fini; or cette quantité est moindre que Ama^3 qui est du second ordre, puisque ma est fini; donc Ana^3 est au moins du second ordre. En prenant donc $\varphi = n\omega'$, l'erreur est du second ordre, et $\varphi\alpha$ est en erreur d'une quantité du quatrième, qui ne produira sur la somme $\Sigma\varphi\alpha$ qu'une erreur du troisième, que nous devons négliger. Nous pouvons donc nous borner à la valeur beaucoup plus simple

$$AB = \Sigma n\alpha\omega' = \alpha\omega' \Sigma n.$$

Mais n passant par toutes les valeurs de 0 à $m-1$, on a

$$\Sigma n = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Donc

$$AB = \frac{m(m-1)\alpha\omega'}{2} = (m-1)\omega' \frac{a}{2}.$$

Mais on peut substituer m à $m-1$, vu qu'il n'en résulte pour AB qu'une erreur du troisième ordre : et par les mêmes raisons que précédemment, $m\omega'$ ne diffère de la somme des courbures ω des m arcs α que d'une quantité du second ordre. Substituant cette somme Ω à $m\omega'$, il n'en résultera donc sur AB qu'une erreur du troisième ordre; et au degré d'approximation demandé, on aura enfin

$$AB = \frac{a\Omega}{2}.$$

Ce qui donne le théorème suivant :

La perpendiculaire abaissée d'une extrémité d'un arc infiniment petit du premier ordre, sur la tangente menée à l'autre extrémité, est égale à la moitié du produit de l'arc par sa courbure, à un infiniment petit près du troisième ordre.

124. *L'angle formé par la corde d'un arc infiniment petit du premier ordre, avec la tangente au milieu de cet arc, est un infiniment petit du second ordre.*

Soit AA′ cet arc, O son milieu, et B′OB la tangente; la corde AA′ fait avec BB′ un angle dont le sinus est égal à la différence des perpendiculaires AB, A′B′, divisée par la corde. Soient Ω, Ω' les courbures des deux moitiés OA, OA′, on aura, d'après le numéro précédent, en désignant par $2a$ la longueur de l'arc AA′,

$$AB = \frac{\Omega a}{2}, \quad A'B' = \frac{\Omega' a}{2};$$

et, par suite,

$$AB - A'B' = (\Omega - \Omega') \cdot \frac{a}{2}.$$

Or nous avons vu (n° 114) que la différence des courbures de deux arcs égaux consécutifs, infiniment petits

du premier ordre, est du second; donc $\Omega - \Omega'$ est du second ordre; et, par suite, la différence $AB - A'B'$ est du troisième, son rapport à AA' est donc du second. Ainsi le sinus de l'angle de AB avec la tangente au milieu O de l'arc sous-tendu est du second ordre; et par conséquent aussi cet angle lui-même est infiniment petit du second ordre, comme nous l'avions annoncé.

125. Remarques diverses. — Les perpendiculaires AB, $A'B'$ étant du second ordre, celle qu'on abaisserait du milieu I de AA' serait aussi du second; il en serait de même évidemment de la perpendiculaire élevée de I sur AA' et terminée à BB', ou à la courbe : et encore de la perpendiculaire abaissée de O sur AA'.

Remarquons encore que dans le triangle rectangle OAB le côté OB et l'angle O étant du premier ordre, la différence de l'hypoténuse OA à OB sera du troisième ordre. Donc aussi *la différence de l'arc* OA *à* OB *sera du troisième ordre.*

— Si l'on avait en O (*fig.* 53) une seconde courbe tangente à la première et ayant même courbure en ce point, et que l'on prît un arc $OA_1 = OA$, la perpendiculaire A_1B_1 serait, au troisième ordre près, égale à $\frac{\Omega_1 a}{4}$, Ω_1 étant la courbure de l'arc OA_1 dont le rapport à Ω a l'unité pour limite par hypothèse. Donc la limite du rapport $\frac{A_1B_1}{AB}$ est l'unité, et, par conséquent, la différence de A_1B_1 à AB est infiniment petite par rapport à AB, et, par conséquent, d'un ordre supérieur au second.

De plus, on voit que BB_1 sera au moins du troisième ordre, puisque c'est la différence de OB et OB_1 qui diffèrent des arcs égaux OA, OA_1 de quantités du troisième ordre. Il en résulte que AA_1 est l'hypoténuse d'un triangle dont un côté est d'un ordre supérieur au second, et l'autre

au moins du troisième, et, par conséquent, AA_1 est d'un ordre supérieur au second.

Il est encore important de remarquer que la longueur d'une corde AS comprise entre deux courbes ayant même courbure en O, et dont la direction limite fait un angle fini avec la tangente commune en O, est d'un ordre supérieur au second. Car on a

$$AS = AA_1 \frac{\sin A_1}{\sin S};$$

et comme sin S reste fini, AS est au moins du même ordre que AA_1.

Ainsi, par exemple, si l'on considère le cercle de courbure d'une courbe quelconque, qu'à partir du point de contact on prenne un arc infiniment petit du premier ordre, et que de son extrémité on mène une sécante faisant un angle fini avec la tangente, la partie comprise entre les deux courbes sera d'un ordre supérieur au second.

126. Si l'on mène une tangente parallèle à la corde AA', l'arc MT (*fig.* 53) compris entre son point de contact T et le milieu M de l'arc, ayant pour courbure l'angle de ses tangentes extrêmes, qui est le même que celui de la corde et de la tangente au milieu, sera infiniment petit du second ordre, comme ce dernier; d'où résulte cette proposition :

L'arc compris entre le milieu d'un arc infiniment petit du premier ordre et le point de contact de la tangente parallèle à la corde de cet arc est infiniment petit du second ordre.

Si sur le milieu I de la corde AA' (*fig.* 54) on élève une perpendiculaire, elle rencontre l'arc en un point P, également distant de A et A'. Or chacune des cordes égales AP, A'P ne différant de l'arc qu'elle sous-tend

que d'un infiniment petit du troisième ordre, les deux arcs AP, A'P ne peuvent avoir entre eux qu'une différence du même ordre. Mais cette différence est le double de PM, puisque M est le milieu de l'arc entier : donc MP est infiniment petit du troisième ordre.

Ainsi :

MT est infiniment petit du second ordre;

MP est du troisième;

et, par suite, TP est du second.

127. Si l'on joint le point I aux points M, T, et qu'on mène les cordes PM, TP, la première sera du troisième ordre et la seconde du second, comme leurs arcs respectifs.

Or nous avons vu que IP est du second : donc *l'angle* PIM *est infiniment petit* (n° 110). Mais dans le triangle TIP les côtés TP, PI étant du même ordre, le rapport des sinus des angles opposés a une limite finie, et, par conséquent, ces deux sinus ont des limites finies ou tendent tous deux vers zéro. Or ce dernier cas ne peut arriver : car il faudrait pour cela que le troisième angle en P tendît vers deux droits ou vers zéro, ce qui n'est pas, puisque la direction TP est infiniment voisine de celle de la tangente en M, et, par conséquent, de celle de AA', à laquelle IP est perpendiculaire ; donc *l'angle* TIP *a une limite finie*

Ainsi, *en joignant le milieu de la corde au milieu de l'arc et au point où la tangente est parallèle à la corde, on a deux directions, dont la première a une limite perpendiculaire à la corde, et la seconde, oblique.*

128. *Les angles formés par les tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit avec sa corde, peuvent être regardés comme égaux, et les tangentes comme égales, en négligeant les infiniment petits du second ordre.*

Soient AA' (*fig.* 55) un arc infiniment petit du premier ordre; AV, A'V ses tangentes extrêmes, dont l'angle

extérieur V mesure la courbure de l'arc AA'. La tangente menée au milieu M de cet arc fait avec AV, A'V des angles MTV, MT'V égaux, au second ordre près, comme mesurant les courbures des arcs égaux AM, A'M (n° 118). Or ces deux angles diffèrent des angles respectifs A, A' de l'angle même des deux droites TT', AA', lequel est du second ordre. Donc, comme nous l'avions annoncé, *les angles des tangentes extrêmes avec la corde sont égaux à un infiniment petit près du second ordre, et donnent la mesure de la demi-courbure de l'arc, à ce même degré d'approximation.*

Cela posé, il est facile de prouver qu'il en est de même des côtés AV, A'V du triangle AVA'. En effet, on a

$$\frac{A'V}{AV} = \frac{\sin A}{\sin A'},$$

et comme la limite de $\frac{\sin A}{\sin A'}$ est la même que celle de $\frac{A}{A'}$, qui est égale à l'unité, il en résulte

$$\lim. \frac{A'V}{AV} = 1.$$

Il est facile d'ailleurs d'apprécier l'ordre de la différence A'V — AV. En effet, l'équation précédente donne

$$\frac{A'V - AV}{AV} = \frac{\sin A - \sin A'}{\sin A'} = \frac{2 \sin\left(\frac{A - A'}{2}\right) \cos \frac{A + A'}{2}}{\sin A'},$$

ce qui est une quantité infiniment petite du premier ordre, puisque $\left(\frac{A - A'}{2}\right)$ est du second et sin A' du premier. Le rapport $\frac{A'V - AV}{AV}$ étant du premier ordre, A'V — AV est du second.

Donc les longueurs des tangentes extrêmes sont égales, au second ordre près.

129. *Les angles inscrits dans un segment dont l'arc est infiniment petit du premier ordre, sont égaux, au second ordre près.*

Soient l'arc AA′ (*fig.* 56) et un angle inscrit quelconque AMA′. Si l'on mène la tangente TMT′, l'angle UMA′ sera partagé en deux angles, dont l'un mesure la demi-courbure de A′M et l'autre celle de AM. *Donc l'angle* UMA′ *peut être regardé comme constant et égal à la demi-courbure de* AA′, *au second ordre près.*

L'angle inscrit AMA′ est donc aussi constant, au second ordre près.

130. *Si sur deux courbes tangentes on prend, à partir du point de contact, des arcs infiniment petits égaux, la droite qui joint leurs extrémités a pour direction limite celle de la normale commune.*

Soient M (*fig.* 57) le point de contact, $MM' = MM_1$, et supposons d'abord que les deux courbes soient de côtés différents de la tangente commune. Dans le triangle rectiligne $MM'M_1$, la différence des côtés MM', MM_1, que nous considérerons comme infiniment petits du premier ordre, est du troisième ordre, puisque les arcs sont égaux; de plus, l'angle compris M étant la somme de ceux que chaque corde fait avec la tangente, est aussi du premier ordre (n° 128). Donc les limites des angles M', M_1 sont des angles droits (n° 112), et comme les directions des côtés MM', MM_1 ont pour limite celle de la tangente en M, il en résulte que la limite de la direction de $M'M_1$ est celle de la normale au point M.

Mais si les courbures étaient dans le même sens, les deux arcs MM', MM_1 seraient du même côté de la tangente, et l'angle M serait la différence des deux angles du premier ordre que les cordes font avec la tangente commune. Cet angle pourrait donc être d'un ordre supérieur

au premier, et nous ne serions plus dans les conditions du n° 112. Or nous avons démontré que ces angles ne diffèrent des moitiés des courbures des arcs, que de quantités du second ordre. Si donc les courbures des deux courbes en M sont différentes, ce qui est le cas général, les deux angles qui mesurent les courbures des arcs MM′, MM_1 diffèrent d'une quantité du même ordre que ces arcs, puisque les limites des rapports de ces angles à la longueur de l'arc sont inégales. Ainsi, en laissant de côté les points particuliers où la courbure est la même, l'angle M sera toujours du premier ordre, et, par suite, les angles M′, M_1 ont pour limites des angles droits. Donc généralement *la limite de la direction* $M'M_1$ *est celle de la normale commune.*

Exemples de la détermination des centres de courbure.

131. *Cycloïde.* — Soit T (*fig.* 58) le point de contact du cercle générateur correspondant au point quelconque M de la cycloïde. Nous savons qu'en prenant sur le cercle un arc infiniment petit MI, menant IM′ parallèle à AB et égal à MI; puis prenant TT′ = MI = IM′, le point M′ appartient à la cycloïde, et T′ est le point de contact correspondant du cercle générateur avec la base.

Cela posé, MT, M′T′ sont deux normales infiniment voisines, et la limite de leur point de rencontre N est, d'après ce qui précède, le centre de courbure de la cycloïde, correspondant au point M.

Or, si l'on joint IT′ et qu'on mène MK parallèle à AB, on aura HK = TT′, et on reconnaît facilement que le rapport de MH à MI et, par suite, à TT′ tend vers l'unité; car, dans le triangle rectiligne MIH, les deux angles I et H ont une même limite finie. En effet, la corde MI a pour direction limite celle de la tangente MU au cercle, et la

direction IHT a pour limite celle de MT; donc l'angle I du triangle a pour limite TMU. L'angle H du même triangle, ou son égal THK, a évidemment pour limite TMK. Or cet angle est égal à TMU, puisque, d'après les propriétés connues du cercle, MT est la bissectrice de UMK; donc la limite du rapport des côtés MH, MI est l'unité. Il en est donc de même de la limite du rapport de MH à l'arc MI, ou à son égal TT'. Donc la limite du rapport $\frac{MK}{TT'}$ est 2. Mais le rapport $\frac{MK}{TT'}$ est constamment égal à $\frac{MN}{TN}$. Donc la limite de MN est 2MT, et on aura le centre de courbure O en prenant TO = TM.

Ainsi dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale.

132. *Ellipse rapportée à ses foyers.* — Soient F, F' (*fig.* 59) les deux foyers, a, b les deux demi-axes, δ, δ' les rayons vecteurs d'un point quelconque M de l'ellipse, M' un second point infiniment voisin de M, MO', M'O' les bissectrices des angles F'MF, F'M'F, qui seront les normales en M, M'. Le rayon de courbure en M sera la limite du rapport $\frac{MM'}{O'}$, puisque l'angle O' des normales est égal à celui des tangentes aux extrémités de l'arc MM'.

Comme nous n'avons en vue qu'une limite de rapports, nous pourrons, d'après les remarques faites précédemment (n° 107), remplacer les quantités infiniment petites par d'autres, dont le rapport avec elles aura l'unité pour limite, et écrire, comme si elles étaient exactes, les équations où elles entreront. Nous avons démontré que le résultat cherché lim. $\frac{MM'}{O'}$ n'en sera aucunement altéré. Nous donnons ainsi un premier exemple de ce

moyen si commode de simplification. Rien ne sera plus facile, au reste, que de faire les mêmes calculs en conservant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, l'exactitude absolue des équations.

Les deux triangles F'MI, O'IM' ayant un angle égal, la somme des deux autres est la même de part et d'autre; d'où, en désignant par F' l'angle infiniment petit MF'M', par ω l'angle donné F'Mω', et de même par F et ω' les angles MFM', F'M'O',

$$O' - F' = \omega - \omega',$$

et de même

$$O' - F = \omega' - \omega;$$

d'où, en ajoutant,

$$2O' = F + F'.$$

Ainsi, en désignant par R le rayon de courbure cherché, on aura

$$R = \lim. \frac{2MM'}{F + F'}.$$

Nous allons calculer les angles F, F' dans les triangles FMM', F'MM', en les substituant à leurs sinus; nous substituerons de même l'arc MM' à sa corde, nous substituerons à la direction de la corde MM' celle de la tangente en M, et aux angles des rayons vecteurs avec MM' les limites de ces angles, c'est-à-dire le complément de ω. Les valeurs de F, F' ainsi calculées ne différeront des véritables que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes, et, par conséquent, la limite du rapport $\frac{MM'}{F + F'}$ ne sera pas altérée.

Nous trouverons de cette manière

$$F = \frac{MM' \cos\omega}{\delta}, \quad F' = \frac{MM' \cos\omega}{\delta'},$$

d'où

$$F + F' = MM' \cos\omega \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right) = \frac{2a\,MM' \cos\omega}{\delta\delta'},$$

et, par suite,

$$R = \frac{\delta\delta'}{a \cos\omega}.$$

Or on sait que $\cos\omega = \frac{b}{\sqrt{\delta\delta'}}$, et que la longueur n de la normale MN a pour expression

$$n = \frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'}.$$

D'où résulte

$$R = \frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2 n^3}{b^4},$$

ou, en désignant par p le demi-paramètre,

$$R = \frac{n^3}{p^2}.$$

Cette formule s'applique également à l'hyperbole et à la parabole.

133. Cette formule donne pour la valeur de R une construction facile; mais on en obtient encore une plus simple en remarquant que la première valeur de R donne pour projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur F'M, la valeur suivante :

$$R \cos\omega = \frac{\delta\delta'}{a}.$$

Or, en divisant les valeurs de n et $\cos\omega$, on obtient

$$\frac{\delta\delta'}{a} = \frac{n}{\cos\omega}.$$

et $\frac{n}{\cos\omega}$ n'est autre chose que la longueur MH obtenue en élevant NH perpendiculaire sur la normale. Le point H est donc la projection de l'extrémité du rayon de courbure ou du centre de courbure. Élevant donc en H une perpendiculaire sur le rayon vecteur F'M, sa rencontre C avec la normale sera le centre de courbure.

134. *Spirale logarithmique.* — Soient M, M' (*fig.* 60) deux points infiniment voisins, A le pôle, MO, M'O les deux normales en M, M'; il s'agit de trouver la limite du point O. Les rayons vecteurs AM, AM' étant, comme nous l'avons vu, également inclinés sur les normales correspondantes, les angles A et O sont égaux, et les quatre points A, M, M', O sont sur un même cercle. Mais lorsque M' tend vers M, ce cercle tend à devenir tangent à la spirale en M, puisque la sécante commune MM' tend vers la tangente à la spirale; donc ce cercle à la limite a pour normale MO : son centre est donc sur MO; la limite C de O ou le centre de courbure est donc l'extrémité du diamètre de ce cercle dont M est l'autre extrémité. L'angle MAC est donc droit, et on a le centre de courbure en élevant en A une perpendiculaire au rayon vecteur, en cherchant sa rencontre avec la normale.

CHAPITRE XVIII.

DÉVELOPPÉES DES COURBES PLANES.

135. Si, sur chacune des normales à une courbe plane quelconque, on considère le centre de courbure correspondant, qui est la limite de la rencontre de cette normale avec une normale infiniment voisine, on obtiendra pour lieu de ces centres une courbe tangente à toutes les normales (n° 76). Cette courbe se nomme la *développée* de la première, et celle-ci s'appelle la *développante* de l'autre. Les développées jouissent d'une propriété remarquable, à laquelle elles doivent leur nom, et que nous allons faire connaître.

Soient M (*fig.* 61) un point quelconque d'une courbe, MO sa normale, O le centre de courbure, M′ un point de la courbe distant de M d'une quantité infiniment petite du premier ordre, O′ le centre de courbure correspondant; les deux droites MO, M′O seront tangentes à la développée aux points O et O′. Or, comme la longueur MO du rayon de courbure dépend de la position de M, ou de la longueur de l'arc de la courbe donnée, compté à partir d'une origine quelconque sur la courbe, on peut regarder MO comme une fonction de l'arc; ainsi, d'après un principe posé précédemment, l'accroissement infiniment petit de MO, ou la différence M′O′— MO sera généralement de même ordre que MM′; et de même l'accroissement OO′ de l'arc de la développée sera de l'ordre MM′, puisque l'arc de la développée est aussi une fonction de celui de la proposée.

Maintenant il est facile de reconnaître que la longueur de l'arc OO′, et la différence des deux rayons de courbure

MO, M′O′ ne peuvent différer que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles-mêmes.

En effet, élevons en M et O des perpendiculaires à MO, qui rencontrent la normale M′O′ en T et H. La partie TM′ est d'un ordre supérieur au premier, puisque M′T est tangente et que la direction HT n'a pas pour limite celle de la tangente (n° 120). De plus la longueur HT ayant MO pour projection sur la normale avec laquelle sa direction fait un angle infiniment petit du premier ordre, la différence entre OM et HT sera infiniment petite du second ordre. Donc la différence entre M′H et MO sera infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, puisqu'il en est ainsi de la partie TM′, dont nous n'avons pas cherché à préciser exactement l'ordre.

Il suit de là que la différence entre M′O′ et MO sera HO′, à une quantité près d'un ordre supérieur au premier. Or l'arc OO′ et la tangente O′H à la développée ont une différence du second ordre (n° 120) : donc enfin OO′ et M′O′ — MO ne peuvent avoir qu'une différence infiniment petite par rapport à elles-mêmes; et, par conséquent, si l'on considère la somme d'arcs infiniment petits OO′ formant un arc fini déterminé de la développée, cet arc sera égal à la limite de la somme des accroissements successifs des rayons de courbure. Et, comme cette somme d'accroissements n'est autre chose que l'accroissement total, ou la différence des rayons de courbure extrêmes, on arrive à cette conclusion : *Un arc fini de la développée d'une courbe quelconque est égal à la différence des deux rayons de courbure de cette courbe, correspondants aux deux extrémités de cet arc.* Et cette proposition s'appliquant à toutes les grandeurs des arcs de la développée, s'applique évidemment aux arcs infiniment petits ; d'où l'on voit que la différence entre OO′ et M′O′ — MO, que nous avions démontrée être d'un ordre

supérieur au premier, était rigoureusement égale à zéro.

136. Il suit de ce qui précède que, si l'on suppose un fil flexible et inextensible appliqué sur la développée jusqu'à un certain point quelconque, à partir duquel il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'au point où il coupera la courbe proposée; qu'ensuite on développe la partie enroulée, en tenant toujours le fil tendu, son extrémité sera toujours sur la courbe donnée. Car l'accroissement de la partie rectiligne du fil tangent sera toujours égal à l'arc de la développée compris entre deux points de contact, ou à la différence des rayons de courbure correspondants; donc la partie rectiligne sera toujours la longueur même du rayon de courbure, et, par suite, l'extrémité sera toujours sur la courbe donnée. Le lieu des centres de courbure d'une courbe peut donc servir à décrire cette courbe par son développement en ligne droite, et c'est de là que lui vient le nom de *développée*.

137. *Développée de la cycloïde.* — Soient M un point quelconque de la cycloïde (*fig.* 62), MN la normale, NMD le cercle générateur, R le rayon de courbure, on a

$$R = 2\,MN;$$

on aura donc le centre de courbure O, relatif au point M, en prenant NO = MN. Mais si au milieu I de la base on élève la perpendiculaire IB égale au diamètre $2a$ du cercle générateur, et qu'on mène en B une parallèle BV à la base, le cercle décrit sur la perpendiculaire NC comme diamètre passera par O : l'arc NO sera donc égal à l'arc MN du cercle NMD, et, par suite, à la ligne AN. Donc OC = NI = BC. Donc le point O appartient à la cycloïde décrite par un point d'un cercle ayant $2a$ pour rayon, le point B pour origine, et BV pour base.

La développée de la cycloïde AEA′ se compose donc de deux demi-cycloïdes AB, A′B, identiques avec la

première, et dont le prolongement se rapporterait aux branches suivantes de celle-ci.

138. La différence de deux rayons de courbure étant égale à l'arc de la développée, compris entre les deux points de contact, et le rayon de courbure de AEA′ étant nul au point A, la ligne MO est égale à l'arc AO. Donc dans toute cycloïde AOB, l'arc compris entre le sommet A et un point quelconque O est double de la corde NO du cercle générateur NOC qui passe en ce point; proposition déjà démontrée précédemment par d'autres considérations.

Ainsi, en revenant à la cycloïde primitive, on aurait

$$ME = 2MD,$$

et, par conséquent,

$$AE = 4a \quad \text{et} \quad AEA' = 8a.$$

Si l'on fait $2a - y = y'$, c'est-à-dire si l'on compte les y' à partir de E, dans le sens EI, et que l'on pose $EM = s$, on aura

$$s^2 = 8ay'.$$

Telle est l'équation de la cycloïde entre l'ordonnée et l'arc, comptés à partir de son sommet.

139. *Développée de la parabole.* — Soient l'équation $y^2 = 2px$ (*fig.* 63), M un point quelconque de la parabole, MN la normale, O le centre de courbure; on aura, d'après une formule donnée précédemment,

$$MO = \frac{\overline{MN}^3}{p^2}.$$

Soient x, y les coordonnées de M; α, β celles de O, et φ l'angle de MO avec la parallèle MI à l'axe des y; on aura

$$MN = (y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y - \beta = MO \cos\varphi, \quad \alpha - x = MO \sin\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{y}, \quad \cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + p^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

On tire de là

$$y^2 = -p^2\beta, \quad \alpha = 3x + p.$$

Entre ces deux équations et celle de la parabole $y^2 = 2px$, si l'on élimine x et y, on aura l'équation du lieu des points O ou la développée. On trouve ainsi

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

On peut remarquer que l'équation précédente $\alpha = 3x + p$ indique une construction fort simple du centre de courbure O. Car l'abscisse OP de ce point étant égale à $3x + p$, on a $NP = 2x$. Il suffit donc de mener la normale indéfinie MN, de prendre NP double de l'abscisse du point donné M et d'élever en P une perpendiculaire à l'axe. Sa rencontre avec la normale donnera le centre de courbure.

140. *Développée de la spirale logarithmique.* — Nous avons trouvé que le centre de courbure C de cette courbe est le point de rencontre de la normale et de la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur (*fig.* 60). Le rapport de AC à AM étant constant, puisque les angles du triangle AMC sont constants, il s'ensuit que deux rayons vecteurs quelconques de la développée seront dans le même rapport que deux rayons vecteurs quelconques de la spirale, faisant entre eux le même angle que les deux autres. Si donc on fait tourner la développée autour de A, jusqu'à ce qu'un de ses points soit sur la spirale, toutes les autres y seront de même et les deux courbes coïncideront. La développée de la spirale logarithmique n'est donc autre chose que cette spirale même qui a tourné d'un certain angle autour du pôle.

CHAPITRE XIX.

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE SUR UN PLAN. PROBLÈME DE LA ROULETTE : MÉTHODE DE DESCARTES POUR MENER LES TANGENTES AUX COURBES QU'ELLE DÉCRIT. GÉNÉRALISATION DE CETTE QUESTION. CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION.

141. Lorsque l'on considère sur un plan fixe une figure invariable qui se déplace d'une manière continue, suivant une loi quelconque, un point quelconque appartenant à cette figure ou lié invariablement à elle, décrit une courbe dépendante de cette loi, et dont les géomètres du XVIIe siècle ont étudié un cas particulier. Leurs recherches ont fait faire des progrès à la géométrie, et le problème qui en a été l'occasion a conservé beaucoup de célébrité. Ils supposaient une courbe roulant sans glisser sur une autre supposée fixe, et ils se sont d'abord proposé de mener la tangente à la courbe décrite par un point lié à celle qui se déplace. Le premier cas qu'ils ont étudié est celui du roulement d'un cercle sur une droite ; un point du cercle même décrit la courbe que nous avons nommée *cycloïde*, et qu'on a d'abord appelée *roulette*.

Nous ne nous proposons pas de faire connaître les différents procédés employés dans cette recherche; nous nous bornerons à la méthode donnée par Descartes, comme la plus simple et la plus générale.

Concevons d'abord, au lieu de deux courbes, deux polygones ayant leurs côtés respectivement égaux, dont l'un soit fixe et l'autre se meuve de manière que les côtés égaux

s'appliquent successivement les uns sur les autres. Un point lié au polygone mobile décrira une suite d'arcs de cercles dont les centres seront les sommets successifs du polygone fixe, et, par conséquent, la normale à l'un quelconque de ces arcs passera par le sommet commun aux deux polygones. Si maintenant on suppose que les côtés des polygones diminuent indéfiniment, de manière que ces polygones tendent à se confondre avec les courbes données, cette propriété de la normale en un point quelconque subsistant toujours, quelle que soit la petitesse des côtés, elle aura encore lieu pour la courbe limite de l'ensemble des arcs de cercle, c'est-à-dire pour celle que décrit le point lié à la courbe mobile. Donc on aura la normale en un point quelconque de ce lieu, en le joignant au point de contact correspondant des deux courbes. La tangente sera la perpendiculaire à cette ligne.

Telle est la méthode de Descartes. Elle s'applique à des courbes quelconques.

Mais on risquerait de se tromper si on la suivait trop loin, par exemple pour la détermination de la courbure; et il faut y regarder de très-près pour reconnaître que ce qui suffit pour la tangente, est insuffisant pour la courbure. C'est pourquoi nous allons reprendre la solution en mettant plus de rigueur dans les raisonnements.

142. Soient LL′ (*fig.* 64) la courbe fixe; SS′ la courbe mobile; M le point de contact pour une position quelconque de SS′; A la position correspondante du point lié à SS′, et qui décrit la courbe en question.

Prenons sur les deux courbes données deux arcs infiniment petits égaux MM′, MM_1; les points M′, M_1 seront coïncidents quand le point de contact des deux courbes sera M_1, puisque, d'après la définition du roulement sans glissement, les arcs qui séparent des points de contact corres-

pondants, pris sur les deux courbes, doivent être égaux. Pour amener le système mobile dans la position qu'il aura alors, on peut le faire mouvoir d'abord de manière que tous les points décrivent des droites égales et parallèles à $M'M_1$, ce qui amènera M' en M_1; puis, laissant le point M' fixe en M_1, faire tourner le système autour de ce point, de manière que la tangente en M' coïncide avec celle en M_1. Dans ce dernier mouvement toutes les droites s'inclineront, sur leur première direction, d'un angle égal à celui des tangentes en M' et M_1, c'est-à-dire de la somme ou de la différence des courbures des deux arcs MM', MM_1, suivant que ces courbures seront de sens contraire ou de même sens. Si donc nous menons AA' égal et parallèle à $M'M_1$, et que de M_1 comme centre, avec un rayon égal à $A'M_1$, qui n'est autre chose que AM', nous décrivions un arc de cercle $A'A_1$, tel que l'angle $A'M_1A_1$ soit égal à celui des tangentes en M' et M_1; A_1 sera la position exacte de A, correspondante au contact en M_1 : AA_1 sera donc la sécante au lieu décrit par A et la limite de sa direction sera la tangente cherchée.

Or les deux côtés MM', MM_1 du triangle rectiligne $MM'M_1$ ayant pour limite de leur rapport l'unité, et comprenant un angle infiniment petit, le troisième côté $M'M_1$ est infiniment petit par rapport aux deux autres. De plus, l'angle des tangentes en M', M_1 est généralement du premier ordre, même lorsque les courbures sont de même sens. Son égal $A'M_1A_1$ sera donc du premier ordre, et il en sera de même de la droite $A'A_1$, puisque $A'M_1$ a une longueur finie. Donc dans le triangle $AA'A_1$, le côté AA' est infiniment petit par rapport à $A'A_1$; par conséquent, l'angle A_1 a pour limite zéro, et la direction de la sécante AA_1 a la même limite que celle de $A'A_1$. Mais cette dernière tend à faire un angle droit en A' avec la droite $A'M_1$ dont la position limite est AM; donc enfin

la limite de la direction AA_1, ou la tangente cherchée, est perpendiculaire à AM.

Expression du rayon de courbure de la courbe décrite par un point lié à la courbe roulante.

143. Une courbe donnée U'V' (*fig.* 65) roulant sans glisser sur une courbe fixe UV, un point M lié à U'V' décrit une courbe dont on demande le rayon de courbure en un quelconque de ses points.

Soient A le point de contact des deux courbes correspondant à une position quelconque M du point décrivant; O, O' les centres de courbure de ces courbes, qui se rapportent au point A. On sait que AM sera la normale à la courbe décrite par M; nous désignerons par n sa longueur AM, et par φ l'angle qu'elle fait avec la normale commune OO' aux deux courbes données.

Prenons sur ces courbes deux arcs infiniment petits égaux AN, AN'. Soit M' la position qu'aura prise M lorsque N' sera venu s'appliquer sur N; MN' viendra dans la position M'N; elle sera la normale en M': le point de rencontre X de M'N et MA sera, à la limite, le centre de courbure de la courbe en question; et MX sera, à la limite, le rayon de courbure, que nous désignerons par ρ.

Dans ce mouvement, qui amène N' en N, et, par suite, la tangente en N' sur la tangente en N, toutes les lignes du système se sont inclinées d'un angle égal à celui de ces deux tangentes, ou de leurs perpendiculaires N'O', NO. Cet angle est $O + O'$, et peut être regardé comme ayant pour mesure

$$\frac{AN}{R} + \frac{AN'}{R'}.$$

ou, à cause de $AN = AN'$,

$$AN\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

La droite $N'M$ étant venue, dans ce même mouvement, coïncider avec $M'NX$, s'est inclinée d'un angle égal à $N'MA + X$.

Mais, en négligeant les infiniment petits sans influence sur le résultat, on peut prendre

$$N'MA = \frac{AN\cos\varphi}{AM}, \quad X = \frac{AN\cos\varphi}{AX}.$$

La somme de ces deux angles sera, en employant les notations précédentes,

$$AN\cos\varphi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right);$$

égalant ces deux expressions de la rotation du système, il vient

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right)\cos\varphi;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \rho = \frac{n^2(R + R')}{n(R + R') - RR'\cos\varphi},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} - \frac{RR'\cos\varphi}{n^2(R + R')}.$$

Les formules (1) et (2) résolvent la question et donnent le rayon de courbure du lieu de M, au moyen des rayons de courbure des deux courbes données, en leur point de contact A correspondant à M, et, en outre, de la posi-

tion du point M_1 par rapport à A et à la normale à ces courbes.

Il n'est donc besoin de connaître aucune autre chose relativement aux courbes données, que leurs rayons de courbure au point que l'on considère. Ainsi l'on pourrait, en ce point, leur substituer deux autres courbes ayant même courbure qu'elles, et, par conséquent, leurs cercles de courbure eux-mêmes. Le lieu décrit par le point M ne serait plus le même, mais au point en question il aurait toujours même courbure.

Si la ligne UV est droite, on a

$$R = \infty, \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = \frac{n^2}{n - R' \cos\varphi},$$

ce qui est immédiatement applicable à la cycloïde et ramène au résultat déjà trouvé.

Si U'V' est une ligne droite, UV étant une courbe quelconque, on a

$$R' = \infty,$$

et la formule (1) devient

$$\rho = \frac{n^2}{n - R \cos\varphi};$$

si de plus le point M était situé sur la droite mobile, on aurait

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{et, par suite,} \quad \rho = n.$$

Le centre de courbure serait donc au point de contact A, et, en effet, dans ce cas la courbe décrite ne serait autre chose qu'une développante de la courbe fixe.

Observation. — Si la courbe UV tournait sa convexité en sens contraire, il faudrait changer R en — R dans les formules (1) et (2), pourvu toutefois que le

centre de courbure X se trouvât toujours, comme on l'a supposé, sur le prolongement de MA.

Si au contraire le point X se trouvait du même côté que M, il faudrait changer ρ en $-\rho$ dans ces mêmes formules.

Application aux épicycloïdes.

144. Si l'on suppose que les courbes UV, U'V' (*fig.* 66) soient des cercles, et que le point M appartienne au cercle mobile lui-même, la courbe décrite sera ce qu'on appelle une *épicycloïde* plane.

Voyons ce que donne alors la formule (1).

Le triangle AMB donnant

$$\cos\varphi = \frac{n}{2R'},$$

on aura

$$(3) \qquad \rho = \frac{2n(R+R')}{R+2R'} = n + \frac{nR}{R+2R'}.$$

Ainsi, pour avoir le centre de courbure, il suffit de prolonger la normale AM d'une quantité AX dont la valeur est

$$AX = \frac{nR}{R+2R'}.$$

Cette remarque donne un moyen bien simple de construire le centre de courbure X. Il suffit pour cela de tirer le diamètre MM_1, puis la droite M_1O : la rencontre de cette dernière avec MA donnera le point X.

En effet, la corde BM_1 étant parallèle à MA, on aura la proportion

$$AX : BM_1 :: AO : OB$$

ou

$$AX : n :: R : R + 2R',$$

ce qui démontre la proposition.

Si R est infini, la courbe devient une cycloïde, et l'on trouve $\rho = 2n$, comme on l'a vu précédemment.

Si $R = -2R'$, on trouve $\rho = \infty$ en chaque point, et l'épicycloïde se réduit à une ligne droite.

Si le point M, au lieu d'être sur la circonférence O', était à l'intérieur ou à l'extérieur, il décrirait ce que l'on appelle une épicycloïde allongée ou raccourcie, à laquelle on pourrait semblablement appliquer la formule (1).

Développées des épicycloïdes.

145. La développée de l'épicycloïde décrite par M est le lieu des points X; et nous allons démontrer que c'est encore une épicycloïde.

Soit C la position primitive de M; on a alors $AM = o$, et le point X coïncide aussi avec C. Prenant ensuite l'arc CD égal à la demi-circonférence R', le point M est en m à sa distance maximun $R + 2R'$ du centre O; et le point X est à sa distance minimum Ox de ce même point.

Pour connaître cette dernière, il faut faire $n = 2R'$ dans la valeur de AX; ce qui donne

$$Dx = \frac{2RR'}{R + 2R'}, \quad Ox = \frac{R^2}{R + 2R'};$$

faisant

$$Ox = r, \quad Dx = 2r',$$

on aura donc

$$r = \frac{R^2}{R + 2R'}, \quad r' = \frac{RR'}{R + 2R'},$$

d'où

$$r : r' :: R : R'.$$

Cela posé, décrivons du centre o un cercle avec le rayon r, qui coupera OB en I; et sur AI comme diamètre, décrivons un cercle dont le rayon sera r'. Il est facile de

voir que ce cercle passera par le point X; car MA, prolongé jusqu'à ce cercle tangent en A au cercle O', donnera une corde dont le rapport à MA sera celui des rayons $\frac{r'}{R'}$ ou $\frac{R}{R+2R'}$.

Cette corde sera donc égale à $\frac{nR}{R+2R'}$ ou à AX.

Maintenant les arcs AX et AM étant semblables seront dans le rapport des rayons r', R', ou, d'après ce qui précède, dans le rapport de r : R. Il en sera de même des suppléments de ces arcs, et l'on aura, par conséquent,

$$IX : AM_1 :: r : R.$$

Mais $AM_1 = AD$, puisque CD est égal à la demi-circonférence MAM_1.

On a donc

$$IX : AD :: r : R :: Ox : OD.$$

Donc

$$IX = Ix,$$

d'où il résulte que le point X est constamment sur l'épicycloïde décrite par un point du cercle de rayon r' roulant sur le cercle de rayon r, ce point partant de x. Le point de rebroussement de cette épicycloïde correspondra donc au sommet m de la première, et le point de rebroussement C de la première au sommet c de la seconde.

On reconnaît facilement que les deux nouveaux cercles r, r' forment un système semblable à celui des cercles R, R', et qu'ainsi les deux épicycloïdes sont semblables. Ainsi, la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable, et le rapport de similitude est $\frac{r}{R}$ ou $\frac{R}{R+2R'}$.

De la double génération des épicycloïdes planes.

146. Toute épicycloïde peut être engendrée par deux cercles de rayons différents, roulant sur un même cercle.

1°. Supposons le cercle roulant intérieur au cercle fixe O (*fig.* 67). Soient AB son rayon, B le point de contact dans une position quelconque, M le point décrivant dont la position primitive était I; on aura BM = BI. Par le point M, faisons passer un cercle de rayon OA tangent au cercle O. Il suffira pour cela de mener le rayon OB′ parallèle à AM et de prendre OA′ = AB = AM. Il en résultera

$$A'B' = OA = AM.$$

Le cercle décrit du centre A′ avec un rayon égal à OA passera donc par M et sera tangent en B′ au cercle O.

Cela posé, il est facile de voir que les arcs B′M, B′I sont égaux.

En effet, puisque la figure OAMA′ est un parallélogramme, les angles B′A′M, MAB, BOB′ sont égaux.

Donc

$$\frac{B'M}{A'M} = \frac{BM}{AB} = \frac{BB'}{OB}.$$

Ajoutant les termes des deux premiers rapports égaux, on aura encore un rapport égal

$$\frac{B'M + BM}{OB},$$

d'où résulte

$$BB' = B'M + BM,$$

et, par suite,

$$B'M = B'I.$$

Donc le point M appartient à l'épicycloïde décrite par le cercle A′ roulant intérieurement sur le cercle O en sens contraire du cercle A.

Si donc M est un point lié invariablement aux deux cercles, le cercle A′ tournant dans O sans glisser fera rouler le cercle A de manière que les arcs IB, IB′, égaux respectivement à MB, MB′, soient entre eux comme les rayons AB, OA; et, par conséquent, les vitesses angulaires des centres A, A′ autour de O seront proportionnelles aux rayons de ces cercles.

2°. Supposons maintenant que le cercle roulant A (*fig.* 68) soit extérieur au cercle fixe O.

Soit M le point du cercle A qui décrit l'épicycloïde, I sa position primitive sur le cercle O, B le point de contact des cercles A, O; les arcs MB, IB seront égaux.

Menons par O un rayon OB′ parallèle à AM; prenons OA′ = AM, et décrivons un cercle de A′ comme centre avec un rayon égal à A′B′, c'est-à-dire égal à la somme des rayons des deux cercles donnés. Ce cercle sera tangent en B′ au cercle O; de plus, il passera par M, puisque la figure MAOA′ est un parallélogramme et que, par conséquent, A′M = OA = A′B′.

Cela posé, les angles égaux A, A′, O, ayant des mesures égales, on aura

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BB'}{OB} = \frac{MB'}{A'B'},$$

et comme le dénominateur du dernier rapport est la somme de ceux des deux premiers, il s'ensuivra

$$MB' = MB + BB' = IB + BB'.$$

Donc le point M appartient à l'épicycloïde décrite par un point du cercle A′ qui roulerait sur le cercle O, du même côté que le cercle A.

On reconnaît facilement que les vitesses angulaires des centres A, A′ sont encore proportionnelles aux rayons.

Réciproquement, si A′ était le cercle roulant sur le cer-

cle fixe O renfermé dans son intérieur, l'épicycloïde engendrée par un point de ce cercle, pourrait être engendrée par un point du cercle extérieur A, ayant un rayon égal à la différence des deux autres et roulant sur O du même côté que le cercle A'.

On peut tirer de là la conséquence générale que toute épicycloïde peut être engendrée par le roulement de deux cercles de rayons différents sur un même cercle. Les rayons de ces deux cercles ont une somme ou une différence égale au rayon du cercle fixe, et le point de contact de ces cercles générateurs avec le cercle fixe se déplace en sens contraire si ces deux cercles sont intérieurs l'un à l'autre, et dans le même sens dans le cas contraire.

Comment tout déplacement continu se ramène au roulement d'une courbe sur une autre.

147. Euler a démontré qu'une figure tracée sur la surface d'une sphère pouvait être amenée d'une position quelconque à une autre, sur cette même surface, par un seul mouvement de rotation autour d'un point de la sphère comme pôle.

Cette proposition, indépendante de la grandeur du rayon, s'applique évidemment au plan, et d'ailleurs les mêmes raisonnements peuvent être faits directement dans ce cas particulier. On peut l'établir très-simplement de la manière suivante :

Soient A, A_1 (*fig.* 69) les deux positions successives d'un même point du système mobile; on amènerait A en A_1 en donnant à l'ensemble un mouvement de translation par lequel chaque point décrirait une droite égale et parallèle à AA_1. Il suffira donc, après cela, de laisser le point A fixe en A_1 et de faire tourner le système autour de ce point jusqu'à ce qu'un second point arrive à la position qu'il doit occuper. Or ces deux mouvements

successifs peuvent être exécutés au moyen d'une simple rotation autour d'un point fixe. En effet, menons VA_1U perpendiculaire à AA_1, et par A_1, deux droites faisant avec VU des angles égaux à la moitié de l'angle dont le système a dû tourner ; inscrivons entre ces deux droites les lignes MM′, NN′ égales et parallèles à AA_1. Il est facile de voir qu'après les deux mouvements de translation et de rotation, l'un des deux points M ou N, considéré comme lié au système, est revenu à sa première position. Car si la rotation porte de la direction A_1N vers A_1N', et, par conséquent, A_1M' vers A_1N, il est évident que le point M, parvenu en M′ après la translation, reviendra en M après une rotation représentée par l'angle $M'A_1M$. Et si la rotation était en sens inverse, le point N, amené par la translation en N′, sera ramené en N par la rotation.

Il existe donc un point du système qui se trouve à la même place quand le système passe d'une position à l'autre, et par conséquent ce passage peut être effectué en faisant tourner le système autour de ce point. Il est facile de reconnaître que l'angle de cette rotation unique est le même que celui de la première. En effet, supposons que M soit le centre de la rotation finale ; le point A venant en A_1, l'angle de rotation sera précisément AMA_1, qui est égal à MA_1M', puisque AA_1 étant égal et parallèle à MM′, il en résulte que AM est parallèle à A_1M'.

148. Revenons maintenant au mouvement continu d'une figure sur un plan.

Considérons un nombre indéfiniment croissant de positions infiniment voisines du système entre deux quelconques de ses positions ; on pourrait l'amener de chacune d'elles à la suivante par une simple rotation autour d'un point fixe. Les centres successifs sont distants les uns des autres de quantités d'autant plus petites que les

positions sont plus voisines, et en les joignant par des droites on forme un polygone déterminé. On peut maintenant considérer les points liés au système mobile, qui viennent successivement coïncider avec les sommets de ce polygone; ils formeront un autre polygone déterminé, mobile avec le système, et ayant ses côtés successifs respectivement égaux à ceux du polygone fixe sur lesquels ils viendront successivement s'appliquer. On peut donc faire passer le système par toutes les positions intermédiaires que l'on a choisies, en faisant rouler un polygone lié avec lui sur un autre polygone fixe. Concevons maintenant que ces positions se multiplient indéfiniment, on se rapproche de plus en plus du mouvement continu en question; ces deux polygones tendent vers des courbes déterminées, et par conséquent le mouvement donné, quel qu'il soit, peut être opéré en liant une certaine courbe au système mobile, en en construisant une autre qui reste fixe, et faisant rouler la première sur la seconde sans glisser, puisque les parties de polygone qui s'enroulent l'une sur l'autre sont constamment égales. Telle est la manière la plus simple de se représenter le mouvement continu d'un système sur un plan; elle rentre dans le mouvement de roulette que les géomètres avaient d'abord considérée.

149. Les centres des rotations très-petites, ou les différents sommets du polygone fixe, tendent vers des points limites qui sont ceux de la courbe fixe, et que l'on nomme *centres instantanés de rotation*; et l'on dit, en employant le langage infinitésimal, que tout mouvement peut être considéré comme composé d'une infinité de mouvements de rotation autour de ces centres instantanés. Mais il faut toujours entendre par ce langage, que nous avons tant de fois expliqué, que ce mouvement est

la limite d'une suite de mouvements de rotation dont le nombre croît indéfiniment, et qui s'exécutent successivement autour de points qui se rapprochent indéfiniment des centres instantanés.

Moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un point quelconque du système, quand on connaît les tangentes aux trajectoires de deux points.

150. M. Chasles a déduit de ces considérations un moyen de mener la tangente à la trajectoire d'un quelconque des points du système, c'est-à-dire à la courbe qu'il décrit, quand on sait mener les tangentes aux trajectoires de deux de ses points. Il l'a même étendue à d'autres cas, comme nous le verrons tout à l'heure. En effet, nous avons vu que, pour avoir la normale en un point quelconque d'une de ces courbes, il suffisait de joindre ce point au point de contact de la courbe roulante avec la courbe fixe, c'est-à-dire au centre instantané de rotation. Si donc on peut mener les tangentes aux trajectoires de deux points du système, aux points correspondants à une position quelconque de ce système, la rencontre des normales en ces points fera connaître le centre instantané; et en le joignant à un point quelconque du système dans cette même position, on aura la normale à la trajectoire de ce point : la tangente s'ensuit.

Exemple. — Supposons qu'une droite de longueur constante se meuve de manière que ses extrémités restent sur deux droites données; un quelconque de ses points décrira une ellipse dont la normale s'obtiendra en joignant ce point au point de rencontre des perpendiculaires aux deux droites menées par les extrémités de la droite mobile dans la position correspondante au point que l'on considère.

Si, au lieu des deux droites fixes, on avait deux courbes auxquelles on saurait mener les tangentes, il n'y aurait pas plus de difficulté. Dans le cas où ces courbes sont des cercles, la courbe décrite par un point de la droite inscrite est d'un grand usage dans les applications aux machines.

151. *Extension de cette règle au cas où une droite du système est tangente à une courbe fixe, ou passe par un point fixe.*

Cette règle peut être étendue au cas où une droite du système se mouvrait tangentiellement à une courbe fixe donnée; cette condition peut remplacer la connaissance de la trajectoire d'un point.

Il est inutile de parler du cas où la droite roulerait sans glisser sur la courbe, parce que le centre instantané ne serait autre chose que son point de contact avec cette courbe; il serait donc connu et le problème serait résolu. Il suffit donc de considérer le cas où les longueurs qui s'enroulent l'une sur l'autre sont inégales, et où, par conséquent, leurs parties infiniment petites correspondantes n'ont pas pour limite de leur rapport l'unité; de sorte que ces parties étant du premier ordre, leur différence en est aussi. Soient UV, U'V' (*fig.* 70) deux positions infiniment voisines de la droite du système qui reste tangente à la courbe fixe SS'; M, M' les points de contact correspondants à ces deux positions. Lorsque UV se déplace, celui de ses points qui était en M décrit une trajectoire tangente en M à la courbe SS'. En effet, soit M_1 sa position sur U'V'; la différence entre $M'M_1$ et l'arc MM' est par hypothèse du même ordre que MM'; mais, puisque l'angle des tangentes, ainsi que $M'M_1$ sont des infiniment petits du même ordre que MM' ou du premier ordre, la distance MM_1 est aussi du premier

et la perpendiculaire abaissée de M_1 sur MV est du second; donc l'angle M_1MV a pour limite zéro; c'est-à-dire que la tangente en M à la courbe que décrit ce point lié à la droite UV, coïncide avec UV.

Il suit de là que dans une quelconque des positions de UV, son point de contact M peut être considéré comme se mouvant sur une courbe fixe tangente en M à UV. Donc on aura le centre instantané de rotation, en élevant en M une perpendiculaire à UV et cherchant son point de rencontre avec la normale à la trajectoire connue d'un autre point du système.

Mais si, au lieu de cette trajectoire d'un autre point, on connaissait une seconde courbe à laquelle une seconde droite du système serait tangente, on se retrouverait dans le même cas que tout à l'heure; et en élevant une perpendiculaire à cette seconde droite en son point de contact, on aurait une nouvelle droite renfermant le centre instantané de rotation qui se trouverait ainsi déterminé. D'où résulteraient, comme nous l'avons vu, les tangentes aux trajectoires des autres points.

152. Si la courbe à laquelle la droite du système est tangente se réduisait à un point, c'est-à-dire si elle était assujettie à passer par un point fixe, il suit de ce qui précède qu'en élevant en ce point une perpendiculaire à la droite, on aurait une ligne passant par le centre instantané. D'ailleurs la démonstration directe en est encore plus facile.

Car soient A (*fig.* 71) le point fixe, UV, U'V' deux positions infiniment voisines de la droite, M' la position où est venu le point M de UV, MM' sera une sécante du lieu décrit par ce point; à mesure que U'V' s'approcherait de reprendre la position UV, le point M' tendrait vers M et la sécante MM' vers UV; cette dernière direc-

tion est donc celle de la tangente au lieu décrit par le point M de UV. Donc on aura encore une ligne contenant le centre instantané de rotation, en menant par M une perpendiculaire à UV.

Applications de ces différents procédés.

153. 1°. *Conchoïde.* — La droite AN (*fig.* 36) passant par le point fixe A, et son point M décrivant la droite XY, on aura la normale à la courbe décrite par un de ses points N, en élevant en A une perpendiculaire à AN, et en M une perpendiculaire à XY, puis joignant N à leur point de concours O.

On reconnaîtrait facilement que cette solution plus simple rentre dans celle que nous avions trouvée par une autre voie.

2°. *Cyssoïde.* — Nous considérerons le mode suivant de génération de cette courbe.

On donne deux droites rectangulaires AC, CZ (*fig.* 72); on prend deux longueurs égales CB, BA, et on fait mouvoir un angle droit AVU, de manière que VU = AC, que le point U se meuve sur CZ, et que le côté VA passe toujours par le point fixe A : le milieu M de UV décrira une cyssoïde commençant en B et ayant pour asymptote la parallèle à CZ à une distance CB′ = CB.

Cela posé, pour mener la tangente en M, il suffira d'élever en U une perpendiculaire à la droite CZ, sur laquelle se meut le point U de la figure mobile, et en A une perpendiculaire à AV; le point de rencontre de ces droites sera le centre instantané, et, en le joignant à M, on aura la normale à la cyssoïde.

3°. *Angle droit dont les côtés sont tangents à une ellipse.* — Il suffira de mener des perpendiculaires aux côtés de l'angle, en chacun des points de contact, et de joindre

leur point de rencontre au sommet de l'angle mobile; on aura ainsi la normale au lieu décrit par ce sommet. Cette normale sera la seconde diagonale d'un rectangle dont l'autre sera la corde de contact; elle passera donc par le milieu de cette corde et, par suite, par le centre. On voit donc que toutes les normales au lieu en question passent par le centre de l'ellipse; donc ce lieu est un cercle concentrique à l'ellipse. On aura son rayon en prenant les côtés de l'angle parallèles aux axes; on trouvera ainsi $\sqrt{a^2+b^2}$, en désignant les demi-axes par a, b.

Les mêmes raisonnements s'appliquent immédiatement à l'hyperbole; mais le problème n'est pas toujours possible. Dans le cas de la parabole, toutes les normales au lieu seront parallèles à l'axe; par conséquent, ce lieu sera une droite perpendiculaire l'axe : et l'on reconnaît facilement que c'est la directrice.

CHAPITRE XX.

DES COURBES ENVELOPPES.

154. Considérons une courbe dont l'équation renferme une constante, ou paramètre, à laquelle on donne une série de valeurs, variant d'une manière continue. Pour chacune de ces valeurs, on aura une courbe déterminée. Ces courbes changeront de forme et de position; et, si leurs points laissaient une trace sur le plan, il arriverait généralement qu'il y aurait une partie du plan sur laquelle cette trace serait imprimée et une autre partie où il n'en existerait pas. La séparation de ces deux parties sera une ligne avec laquelle les courbes variables auront un point commun, mais qu'elles ne pourront couper, puisqu'alors elles pénétreraient dans la région où cependant elles n'ont aucun point, par l'hypothèse même. Cette ligne de séparation est donc tangente à toutes ces courbes, et on la nomme leur *enveloppe*.

Nous avons déjà traité un cas particulier de cette question générale, celui où la ligne mobile est droite; et nous avons démontré que si, pour chacune des positions de cette droite, on cherchait la limite de sa rencontre avec la droite infiniment voisine, on obtenait un point d'une courbe à laquelle ces droites sont constamment tangentes.

Il s'agit maintenant de généraliser ces considérations. Pour cela, considérons une quelconque des courbes en question et deux autres infiniment voisines, l'une précédant, l'autre suivant la première; et supposons que celle-ci soit coupée par chacune des deux autres, ce qui

peut très-bien ne pas arriver. Joignons ces deux points de rencontre infiniment voisins par une droite : ce sera une sécante à la courbe, d'autant plus voisine de la tangente que les courbes seront plus rapprochées.

En agissant de la même manière pour toutes les courbes infiniment voisines, dans toute l'étendue des valeurs du paramètre pour lesquelles les courbes infiniment voisines se coupent, on construira un polygone à côtés infiniment petits et auquel les courbes variables tendront de plus en plus à être tangentes, à mesure que l'on considérera un plus grand nombre de courbes intermédiaires. De sorte que la limite vers laquelle tend le lieu de ces points de rencontre est une courbe tangente à toutes les proposées ; et, sur chacune de celles-ci, on aura le point appartenant à l'enveloppe, en cherchant la limite de son point de rencontre avec une autre qui s'en rapproche indéfiniment. Le problème est donc ramené à la recherche de la limite d'un point, après quoi il rentrera dans les questions ordinaires de lieux géométriques. Le calcul de cette limite peut être indiqué d'une manière générale.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0$$

l'équation d'une quelconque des courbes, a désignant le paramètre variable. Une courbe infiniment voisine correspondra à un accroissement infiniment petit h de a, et aura pour équation

$$(2) \qquad F(x, y, a + h) = 0.$$

Les valeurs de x et y, tirées de ces deux équations, tendront vers les coordonnées du point limite à mesure que l'on y fera tendre h vers zéro. C'est ce que l'on pourra effectuer dans chaque cas particulier; mais il est possible de ramener ce calcul à une considération générale.

Remarquons d'abord que, puisque nous désignons par le même signe F les fonctions qui expriment les deux membres de ces équations, nous supposons que ces fonctions ont une forme unique, que, par exemple, il ne s'y trouve pas de radicaux affectés de double signe; car il faudrait alors s'assurer si, pour le point de rencontre, les signes doivent être pris de la même manière, sans quoi la fonction ne serait pas la même dans les deux équations. Pour éviter ces difficultés, nous admettrons que la forme de l'équation donnée a été modifiée, s'il l'a fallu, de manière à devenir unique.

Retranchant les équations (1), (2), on aura une équation qu'on pourra substituer à (2) sans changer les solutions communes; on peut encore diviser par h, et les coordonnées du point de rencontre des deux courbes infiniment voisines seront données par l'équation (1) et la suivante :

$$(3)\qquad \frac{F(x, y, a+h) - F(x, y, a)}{h} = 0.$$

On aura donc les coordonnées du point limite en cherchant les solutions communes à l'équation (1) et à celle dont le premier membre serait la limite vers laquelle tend celui de l'équation (3) lorsque h tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée de $F(x, y, a)$ par rapport à a.

Ainsi, pour chaque position de la courbe mobile, le point de la courbe enveloppe sera déterminé par les équations

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'(a) = 0,$$

et si l'on veut le lieu de ces points, il suffit d'éliminer a entre ces deux équations.

Remarquons que si dans une de ces positions la courbe n'est pas coupée par les voisines, cela annoncera qu'elle n'aura aucun point commun avec l'enveloppe. Dans ce

cas, cette dernière courbe ne sera tangente qu'aux courbes correspondantes aux valeurs de a comprises entre certaines limites, comme nous en citerons des exemples.

155. *Applications.* — 1°. Soient deux droites parallèles BU, B'U' (*fig.* 73) coupées par une troisième BB', et une droite MM' qui se meut de manière que l'on ait toujours

$$BM \cdot B'M' = m^2;$$

trouver l'enveloppe de ces droites. Prenons pour origine le milieu A de BB', pour axes la droite ABX et une parallèle à BM, et faisons $BB' = 2a$.

En prenant pour équation de M'M

$$y = \alpha x + \beta,$$

on devra avoir, entre α, β, la condition

$$\beta^2 - a^2\alpha^2 = m^2,$$

d'où

$$\beta = \pm\sqrt{a^2\alpha^2 + m^2},$$

et l'équation de la droite sera

$$y = \alpha x \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + m^2}.$$

Pour faire disparaître la double forme, on l'écrira ainsi :

$$(y - \alpha x)^2 = a^2\alpha^2 + m^2,$$

ou

$$y^2 - 2\alpha xy + \alpha^2(x^2 - a^2) - m^2 = 0.$$

Égalant à zéro la dérivée par rapport à α, il vient

$$-xy + \alpha(x^2 - a^2) = 0;$$

en éliminant α entre cette équation et la précédente, on aura pour équation de l'enveloppe

$$a^2y^2 + m^2x^2 = m^2a^2.$$

On peut remarquer que si l'équation de la droite avait été résolue par rapport à x, ce qui aurait donné un double signe, le calcul devenait illusoire, et l'on se trouvait dans le cas dont il a été parlé en général.

2°. Supposons maintenant un cercle variable ayant pour équation

$$(1) \qquad y^2 + (x - a)^2 = ma,$$

a étant le paramètre variable.

Faisant passer tous les termes dans le premier membre, et prenant la dérivée par rapport à a : ou encore prenant les dérivées des deux membres par rapport à a, on trouve

$$(2) \qquad -2x + 2a - m = 0.$$

Éliminant a entre (1) et (2), on a pour équation de l'enveloppe

$$y^2 = mx + \frac{m^2}{4};$$

parabole qui a pour axe la droite sur laquelle se meut le centre du cercle. Son sommet C (*fig.* 74) est à une distance $AC = \frac{m}{4}$, et les points B, B′, où elle coupe l'axe des y, ont pour ordonnées $\pm\frac{m}{2}$.

Cette question offre un exemple du cas où toutes les courbes mobiles ne sont pas touchées par l'enveloppe. En effet, les équations (1), (2) donnent pour coordonnées du point limite de l'intersection de deux cercles

$$x = a - \frac{m}{2}, \quad y = \pm\sqrt{m\left(a - \frac{m}{4}\right)}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de a moindres que $\frac{m}{4}$, les

cercles successifs ne se coupent pas; ils sont intérieurs l'un à l'autre. Pour $a = \frac{m}{4}$, on a

$$y = 0, \quad x = -\frac{m}{4};$$

ce qui donne le point C. Les valeurs plus grandes de a, jusqu'à l'infini, donneront tous les points de la parabole.

Caustiques.

156. Lorsque des rayons de lumière ou de chaleur, émanés d'un même point dans toutes les directions situées dans un même plan, sont réfléchis à leur point de rencontre avec une courbe située dans ce plan, de manière que les angles des rayons incidents et réfléchis avec la normale à cette courbe soient égaux, l'enveloppe des rayons réfléchis se nomme *caustique par réflexion*, relativement à cette courbe et au foyer de chaleur ou de lumière.

Si les rayons étaient réfractés au point où ils rencontrent la courbe, l'enveloppe se nommerait *caustique par réfraction*. Ces courbes ont dans la physique une utilité dont nous ne parlerons pas ici. Pour les obtenir, on cherchera, sur un rayon réfléchi ou réfracté quelconque, la limite de son point de rencontre avec un rayon infiniment voisin, puis le lieu des points ainsi trouvés. Ce point limite peut être trouvé par le calcul, en cherchant l'équation générale des rayons réfléchis ou réfractés; on peut aussi le trouver souvent plus simplement par des considérations géométriques : nous allons en donner quelques exemples, en nous bornant aux caustiques par réflexion.

Considérons d'abord généralement la question pour une courbe quelconque.

Supposons qu'un rayon de lumière parte d'un point donné A (*fig.* 75) et se réfléchisse en B sur une courbe donnée, en faisant avec la normale BV un angle VBX = ABV.

Considérons un autre rayon infiniment voisin, partant de A et se réfléchissant en M sur la courbe. Ce rayon réfléchi rencontre le premier en X.

Cela posé, on demande la limite du point X, lorsque M se rapproche indéfiniment de B.

On suppose connue, d'après la nature de la courbe, la limite m du rapport de l'angle O des deux normales à l'angle A correspondant.

Les deux triangles MHX, BHO, ayant un angle égal H, donneront, en désignant par α, α' les deux angles d'incidence successifs,

$$X - O = OBH - HMX = \alpha - \alpha';$$

les deux triangles BAK, MOK donnent de même

$$O - A = \alpha - \alpha',$$

d'où

$$X - O = O - A \quad \text{ou} \quad X + A = 2O.$$

On aura maintenant les deux proportions suivantes :

$$MX : MI :: \sin I : \sin X, \quad BA : BI :: \sin I : \sin A,$$

d'où

$$\frac{MX}{BA} : \frac{MI}{BI} :: 1 : \frac{\sin X}{\sin A}.$$

Or on reconnaît facilement que la limite du rapport $\frac{MI}{BI}$ est l'unité, parce que, dans le triangle BIM, les deux angles B et M ont une même limite finie. Donc

$$\lim. \frac{MX}{BA} = \lim. \frac{\sin A}{\sin X} = \lim \frac{A}{X} = \lim. \frac{A}{2O - A} = \frac{1}{2m - 1}.$$

Donc enfin, en observant que MX et BX ont même limite, on aura

$$\lim. BX = \frac{AB}{2m - 1}.$$

La limite m peut s'exprimer au moyen du rayon de courbure R et de l'angle d'incidence α. En effet,

$$O = \lim. \frac{BM}{R},$$

et l'on peut prendre

$$A = \frac{BH_1}{AB} = \frac{BM \cos\alpha}{AB};$$

donc

$$\lim. \frac{O}{A} = m = \frac{AB}{R \cos\alpha} \quad \text{et} \quad \lim. BX = \frac{AB . R \cos\alpha}{2 AB - R \cos\alpha};$$

si $AB = \infty$,

$$\lim. BX = \frac{R \cos\alpha}{2}.$$

Applications.

157. 1°. *Cercle.* — Un faisceau de rayons parallèles situés dans le plan d'un cercle O (*fig.* 76) est réfléchi par la circonférence de ce cercle; on demande la limite du point X où le rayon PM, après s'être réfléchi suivant MV, est rencontré par les rayons réfléchis infiniment voisins NX.

Cette question rentre dans la précédente, en supposant $A = O$.

On aura donc d'abord

$$X = 2O;$$

le triangle MNX donnera ensuite

$$\frac{NX}{\sin NMX} = \frac{MN}{\sin X}.$$

Passant à la limite, et observant que NX a même limite que MO, et que l'angle NMX a pour limite le complément de α, le premier membre deviendra

$$\frac{\lim. MX}{\cos\alpha}.$$

Quant au second membre, on pourra, sans changer sa limite, remplacer la corde MN par l'arc qui est le produit du rayon du cercle par l'angle O; remplaçant ensuite X par 2O, et substituant l'angle infiniment petit à son sinus, on trouvera $\frac{MO}{2}$ pour limite du second membre.

On conclut de là

$$\lim. MX = \frac{MO \cos\alpha}{2} = \frac{MP}{2}.$$

Cherchons maintenant le lieu des points X, ou la caustique.

Soient CC′ (*fig.* 77) le diamètre parallèle aux rayons, et H′PH un rayon incident quelconque; on aura le rayon réfléchi en faisant l'angle $OHH_1 = OHH'$.

On a vu précédemment que le point M de la caustique s'obtenait en prenant

$$HM = HI = \frac{HP}{2}.$$

Soit N le milieu de HO, la ligne NI sera parallèle à PO; donc l'angle I et, par suite, l'angle M sera droit; et, par conséquent, le cercle décrit sur HN comme diamètre passera par I et M. Les deux angles MHN, AON seront égaux entre eux, comme étant l'un et l'autre égaux à IHN

Or, si l'on décrit du centre O avec un rayon $OA = \frac{OC}{2}$ un cercle qui sera tangent au cercle HMN, l'angle au centre AON aura pour mesure $\frac{AN}{AO}$, et l'angle MHN inscrit dans le cercle dont le diamètre est égal à AO aura pour mesure $\frac{MN}{AO}$.

On aura donc égalité entre les arcs MN, AN, puisque les deux angles sont égaux.

D'où il résulte que le point M de la caustique appartient à l'épicycloïde décrite à partir de l'origine A par un cercle dont le rayon est le quart de celui du cercle donné, roulant sur un cercle concentrique au cercle donné et d'un rayon moitié moindre.

2°. *Caustique par réflexion d'une spirale logarithmique, en supposant le point lumineux au pôle.*

Soient M, M′ (*fig.* 78) deux points infiniment voisins pris sur la spirale; MO, M′O les normales; AM, AM′ deux rayons incidents, et MX, M′X ces mêmes rayons après la réflexion.

Il faut d'abord trouver la limite du point X quand M′ tend vers M.

Les angles des rayons vecteurs avec la normale étant constants, d'après la nature de la courbe, et l'angle de réflexion étant égal à celui d'incidence, on reconnaît immédiatement que les trois angles A, O, X sont égaux.

Donc les cinq points M′, M, A, O, X sont sur un même cercle. La limite de ce cercle est celui qui passerait par les deux points A, M et aurait en M la même tangente que la courbe. Traçant donc ce cercle, le point I, où il coupera le rayon réfléchi, sera un point de la caustique.

Si l'on veut connaître le lieu des points I, il suffira de remarquer que le triangle AMI est isocèle, puisque les

cordes MA, MI, symétriques par rapport au diamètre MO′, sont égales, et que l'angle AMI est constant ; donc le rapport de AI à AM est constant, ainsi que l'angle IAM.

Donc les points I appartiennent à une spirale identique à la proposée, et que l'on fera coïncider avec elle en la faisant tourner autour du pôle, jusqu'à ce qu'un quelconque de ses points vienne s'appliquer sur la spirale donnée.

De l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre.

158. Soient HMK (*fig.* 79) la courbe enveloppée, M le point où elle touche l'enveloppe UV ; H′M′K′ la première courbe dans une position infiniment voisine, M′ le point où elle touche l'enveloppe. Les points de contact de la courbe mobile et de UV se déplacent d'une manière continue sur cette courbe mobile ; de sorte que le point M de HK est situé sur H′K′ à une distance infiniment petite de M′. Ce point est donc à une distance infiniment petite du second ordre de UV, puisque la courbe H′K′ est tangente à UV en M′.

D'où il résulte que le lieu décrit par le point M de la courbe mobile est tangent en M à UV, et par conséquent à HK.

Ce qui donne le théorème suivant :

Les points où une courbe mobile invariable touche son enveloppe, dans une quelconque de ses positions, sont ceux qui décrivent des trajectoires tangentes à la courbe mobile dans la position que l'on considère.

Or la trajectoire d'un point lié à la courbe roulante a sa tangente perpendiculaire à la droite qui joint le point que l'on considère au centre instantané de rotation, et ce

centre est le point de contact de la courbe roulante avec la courbe fixe.

Donc, enfin, pour une position quelconque de la courbe mobile, on aura les points où elle touche l'enveloppe, en abaissant du point de contact de la courbe roulante toutes les normales possibles sur la courbe mobile.

Exemple. — Un cercle dont le centre est O′ (*fig.* 80) roule sur un cercle fixe dont le centre est O; trouver l'enveloppe d'un diamètre déterminé du premier.

Soient CC′ une position quelconque du diamètre en question, et B le point du cercle O, avec lequel le point C a coïncidé; les arcs AB et AC seront égaux.

Pour avoir le point de CC′ qui appartient à son enveloppe, il faut abaisser du point de contact A des deux cercles une perpendiculaire AI sur CC′: I sera le point cherché.

Or, si l'on décrit un cercle sur AO′ comme diamètre, il passera par I, et l'angle AOI considéré successivement comme inscrit dans ce cercle, et comme ayant son sommet au centre du cercle roulant, aura pour mesure

$$\frac{\text{arc AI}}{\text{AO}'} \quad \text{et} \quad \frac{\text{arc AC}}{\text{AO}'}.$$

Donc l'arc AI est égal à AC et par suite à AB. Le point I appartient donc à l'épicycloïde décrite par le cercle de diamètre AO′ roulant sur le cercle fixe. Cette épicycloïde est donc l'enveloppe cherchée.

Autre exemple. — Considérons maintenant l'enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités sont assujetties à rester sur deux courbes données, on aura le point appartenant à l'enveloppe en menant d'abord les normales aux deux courbes aux extrémités de la droite; leur point de rencontre sera le centre instantané, et il suffira d'abaisser de ce point une perpendicu-

laire sur la droite inscrite pour avoir le point de la courbe enveloppe.

En appliquant cette construction au cas où les deux courbes se réduisent à des droites perpendiculaires, on retombe sur un résultat précédemment obtenu.

Rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe de forme invariable liée à une courbe qui roule sur une autre.

159. Soient la courbe U'V' (*fig.* 81) roulant sur UV, HK la courbe liée à U'V', et H'K' son enveloppe. Soient A le point de contact de UV, U'V' dans une position quelconque, O, O' les centres de courbure de ces deux lignes, R, R' leurs rayons de courbure, n la longueur de la normale AM abaissée de A sur HK, φ l'angle qu'elle fait avec la normale commune OA'O.

D'après ce qui précède, le point M appartient à l'enveloppe de HK. Pour avoir un point de cette même courbe, infiniment voisin de M, prenons sur UV, U'V' deux arcs égaux infiniment petits AN, AN', que nous désignerons par ω, et abaissons de N' une normale N'B' sur HK. Lorsque, dans le roulement de U'V', N' sera venu coïncider avec N, le point B' de HK sera devenu le point de l'enveloppe, puisque N'B' sera alors la normale abaissée sur HK du point de contact N des deux courbes UV, U'V'. Soit B la position que B' aura prise ainsi, BN sera la normale commune à l'enveloppée et à H'K'; le point X où elle rencontre la normale infiniment voisine a pour limite le centre de courbure de l'enveloppe, et nous le considérerons dans nos calculs comme étant ce point même.

De même nous considérerons le point de rencontre I des deux normales à HK aux points infiniment voisins M, B' comme étant le centre de courbure de HK, et nous fe-

rons

$$MI = \rho', \quad MX = \rho.$$

Cela posé, lorsque le point N sera devenu le point de contact, le système mobile aura tourné d'une quantité angulaire égale à l'angle que faisaient les deux tangentes en N, N′ lorsque A était le point de contact. Cet angle, qui est le même que celui des normales NO, N′O′, est égal à la somme des angles O, O′ ou à $\frac{\omega}{R} + \frac{\omega}{R'}$.

Mais, d'une autre part, la ligne N′B′I étant venue coïncider avec BNX, la quantité dont le système a tourné doit être égale à la somme des angles I, X; d'où résulte

$$O + O' = I + X.$$

Pour évaluer les angles I, X on abaissera de A des perpendiculaires sur IN′ et BX; elles auront pour valeur $\omega \cos\varphi$, et l'on aura, par conséquent,

$$I = \frac{\omega \cos\varphi}{n + \rho'}, \quad X = \frac{\omega \cos\varphi}{\rho - n};$$

d'où résultera l'équation

$$\frac{\omega}{R} + \frac{\omega}{R'} = \frac{\omega \cos\varphi}{n + \rho'} + \frac{\omega \cos\varphi}{\rho - n},$$

ou

$$(4) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi \left(\frac{1}{n + \rho'} + \frac{1}{\rho - n}\right),$$

ce qui détermine ρ au moyen de R, R′, ρ', n, φ.

On voit donc que le rayon de courbure en un point quelconque de l'enveloppe ne dépend que des rayons de courbure des trois courbes UV, U′V′, HK et non de ces courbes mêmes; de sorte que, pour cette détermination, on pourrait les remplacer par leurs cercles osculateurs,

correspondants à la position quelconque que l'on considère.

160. On retomberait dans le cas primitivement examiné, si l'on supposait que le rayon de courbure ρ' fût constamment nul, parce que la courbe HK se réduirait alors à un point. On voit, en effet, que l'équation (4) coïncide avec l'équation (1) lorsque l'on fait $\rho' = 0$. La première question n'est donc qu'un cas particulier de la seconde, et l'équation générale (4) renferme la solution de l'une et de l'autre; on pourra donc se borner à conserver cette dernière formule.

Exemple. — Appliquons la formule (4) au cas déjà examiné, où les courbes UV, U'V' sont des cercles, et HK un diamètre de ce dernier.

Il faut alors supposer R, R' constants et $\rho' = \infty$, ce qui réduit d'abord la formule (3) à la suivante :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\cos\varphi}{\rho - n};$$

d'où

$$\rho = n + \frac{\cos\varphi}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}}.$$

Exprimant $\cos\varphi$ au moyen de n, d'après la relation évidente $n = R'\cos\varphi$, il vient

$$\rho = \frac{n(2R + R')}{R + R'}.$$

En comparant cette valeur à la formule générale (3) relative aux épicycloïdes, on reconnaît, comme cela devait être, que ρ est le rayon de courbure d'une épicycloïde décrite par un point d'un cercle de rayon $\frac{R'}{2}$ roulant sur un cercle de rayon R.

Mesure du glissement de la courbe mobile sur son enveloppe.

161. Si l'arc MB pouvait être égal à MB′, la courbe HK roulerait sans glisser sur l'enveloppe H′K′. Cela n'est pas possible, parce que le système mobile devrait alors tourner autour du point de contact M supposé immobile, ce qui ne peut être, puisque le point A l'est lui-même. Car les vitesses de tous les points seraient nulles, si celles de deux points l'étaient; et si toutes les vitesses étaient nulles à chaque instant, le système serait constamment dans la même position.

Nous allons d'ailleurs reconnaître que le calcul donne des valeurs essentiellement différentes pour MB et MB′. En effet, on a

$$MB = \rho X = \frac{\rho\omega\cos\varphi}{\rho - n}, \quad MB' = \rho' 1 = \frac{\rho'\omega\cos\varphi}{\rho' + n};$$

donc

$$MB - MB' = \omega\cos\varphi\left(\frac{\rho}{\rho - n} - \frac{\rho'}{\rho' + n}\right) = n\omega\cos\varphi\,\frac{\rho + \rho'}{(\rho - n)(\rho' + n)}$$

et, en vertu de l'équation (4),

$$MB - MB' = n\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = n(O + O').$$

C'est ainsi que M. Savary, après avoir établi la formule (4) dans ses feuilles sur les engrenages, a donné le calcul de l'arc de glissement dont la considération est indispensable dans la théorie des machines.

162. Mais nous allons montrer comment il est possible de calculer cet arc de glissement sans introduire les rayons de courbure des deux courbes qui glissent l'une sur

l'autre, et, par conséquent, sans avoir besoin de connaître la formule (4).

En effet, avant de calculer cette formule, nous avons fait voir que si l'on prenait deux arcs infiniment petits égaux AN, AN′ sur UV, U′V′; que de N′ on abaissât une normale N′B′ sur HK, et de N une normale NB sur H′K′, le point B′ de la courbe mobile venait prendre la position B, lorsque N′ coïncidait avec N.

Or les arcs MB′, MB étant tangents, le point B′ peut être considéré comme appartenant à l'arc MB, en négligeant les infiniment petits du second ordre. Donc on peut prendre M′B pour la différence MB — MB′, ou l'arc de glissement. Mais B′B peut aussi être regardé comme un arc de cercle décrit du centre A avec le rayon n, pendant que le système tourne de l'angle O + O′ pour arriver à sa seconde position.

Donc

$$MB - MB' = n(O + O') = n\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

CHAPITRE XXI.

CERCLE OSCULATEUR.

163. De même qu'il a été intéressant de chercher la limite de la direction suivant laquelle on passe d'un point d'une courbe à un autre infiniment voisin, et que nous avons appelé la *direction même de la courbe en ce point*, de même il est naturel de chercher le cercle, c'est-à-dire la ligne la plus simple après la droite, qui serait la limite de ceux qui, ayant un point donné commun avec une courbe, ont encore dans le voisinage autant de points communs avec elle que le comporte la nature du cercle. De là ce problème :

Trouver la limite des cercles qui passent par un point donné d'une courbe, et par deux autres points de la même courbe, infiniment voisins du premier.

Ce cercle limite se nomme *cercle osculateur*.

Soient M (*fig.* 82) un point d'une courbe quelconque, N, P deux autres de ses points infiniment voisins du premier; faisons passer un cercle par ses trois points. On sait que dans tout cercle un arc est égal au produit du diamètre par l'angle inscrit opposé : d'après cela, en désignant par r le rayon du cercle qui passe par les points M, N, P, on aura, en désignant l'arc de cercle par MP, et observant que l'angle inscrit est égal à l'angle extérieur N,

$$2r = \frac{\text{MP}}{\text{N}},$$

et l'on pourrait encore prendre le rapport de la corde au sinus de N.

Mais nous avons vu que l'angle extérieur N est égal à la moitié de la courbure ω de l'arc MP de la courbe, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet angle; et d'ailleurs le rapport de l'arc de cercle MP à l'arc de la courbe a pour limite l'unité, puisque leur corde est la même. La limite de $\frac{MP}{N}$ est donc la même que celle de $\frac{\text{arc MP}}{\frac{\omega}{2}}$, arc MP désignant l'arc de la courbe donnée.

Si donc on représente par R la limite de r, ou le rayon du cercle oscillateur, on aura

$$R = \lim. \frac{\text{arc MP}}{\omega},$$

ce qui n'est autre chose que le rayon du cercle de courbure. Il est d'ailleurs évident que ce cercle est tangent à la courbe en M, puisque la limite de la direction MN sera une tangente commune.

Le cercle osculateur se confond donc avec le cercle de courbure.

Remarque. — Nous devons faire ici une observation importante. Les raisonnements précédents n'imposent aucune condition à la position du point N entre M et P; elle peut diviser l'arc MP en deux parties du même ordre ou d'un ordre différent; l'angle extérieur pouvant toujours être remplacé par la moitié de la courbure de l'arc MP, on arrivera toujours au même résultat. On pourrait, par conséquent, faire coïncider M et N, c'est-à-dire mener un cercle tangent en M à la courbe, et passant par

le point infiniment voisin P, et l'on trouverait le même cercle limite.

C'est d'ailleurs ce que l'on peut reconnaître directement; il suffira de remplacer l'angle N par celui de la tangente en M avec la corde MP : le diamètre du cercle variable sera le rapport de l'arc de cercle MP à cet angle, qui peut être remplacé par la moitié de la courbure de l'arc MP de la courbe. *On trouve donc encore même limite pour le cercle tangent en* M *à la courbe et passant par un autre point de la courbe infiniment voisin du premier.*

164. On peut donner pour le rayon du cercle osculateur une formule dépendante des accroissements de l'ordonnée et de l'arc de la courbe, correspondants à ceux de l'abscisse.

Les deux points infiniment voisins du premier pouvant être pris d'une manière quelconque sans changer le résultat, nous supposerons qu'ils correspondent à deux accroissements successifs égaux de l'abscisse. Soit h la valeur d'un de ces accroissements; l l'accroissement correspondant de l'arc; k l'accroissement correspondant de y; k_1 l'accroissement de cet accroissement quand on y change x en $x+h$; soient M, M′, M″ (*fig.* 83) les trois points de la courbe, O le centre du cercle qu'ils déterminent, R son rayon, MH, M′H′ les accroissements correspondants h, k des coordonnées rectangulaires de M; M′H, M″H′ les accroissements de ces mêmes coordonnées à partir de M′, de sorte que d'après ce qui précède on ait $M'H' = h$, $SM'' = k_1$. L'accroissement l de l'arc, à partir de M, pourra être remplacé par la corde MM′, ou son égale M′S dans les rapports dont on cherchera les limites.

Dans les deux triangles OIM″, MM′H dont les angles

tendent vers les mêmes limites, les rapports des côtés ont les mêmes limites; et comme nous le savons, nous pourrons sans inconvénient les regarder comme égaux : les calculs seront plus simples et les résultats ne seront pas altérés; nous écrirons donc la relation

$$\frac{M''I}{R} = \frac{MH}{MM'}, \quad \text{ou} \quad \frac{M''I}{R} = \frac{h}{l}.$$

Les deux sécantes SL, SM donneront la proportion

$$\frac{SL}{SM} = \frac{SM'}{SM''} \quad \text{ou} \quad \frac{2M''I + k_1}{2l} = \frac{l}{k_1}.$$

Eliminant M''I, il vient

$$R = \frac{l^3}{hk_1^2 + \frac{lk_1^3}{2}}.$$

Observant que le second terme du dénominateur est infiniment petit par rapport au premier, on aura, pour la limite de R ou pour l'expression du rayon de courbure,

$$\lim. \frac{l^3}{hk_1^2}.$$

RÉSUMÉ DU LIVRE PREMIER.

Nous avons établi dans ce livre les principes fondamentaux de la méthode des limites. Nous avons montré comment les anciens avaient introduit la notion des limites, et l'usage qu'ils en faisaient pour ramener la mesure de certaines grandeurs à celle d'autres grandeurs plus simples; comment les modernes avaient rendu plus facile le

passage de la relation des variables à celle de leurs limites, ou des quantités proposées. Nous avons fait voir comment Archimède avait considéré les grandeurs comme limites, soit de séries, soit de sommes de quantités infiniment petites, et nous avons donné des exemples variés de ces procédés. Nous avons considéré ensuite l'emploi que les modernes seuls ont fait des infiniment petits comme termes de rapports, et nous avons montré comment ils y ont été conduits naturellement par le problème des tangentes, qu'ils ont envisagé sous un autre point de vue que les anciens. Mais nous avons fait voir par divers exemples que les limites des rapports d'infiniment petits se présentaient dans bien d'autres recherches que celles des tangentes.

Nous avons fait ressortir l'avantage que présente l'emploi des infiniment petits dans les limites de sommes ou de rapports, et qui consiste en ce qu'on peut leur substituer des quantités infiniment petites inégales, mais qui n'en diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles-mêmes. Ce principe facilite beaucoup les calculs en ce qu'il permet de négliger des quantités dont l'expression serait quelquefois très-compliquée et entièrement inutile pour la détermination du résultat que l'on a en vue.

Dans les applications que nous avons faites des infiniment petits à l'étude des théories géométriques et mécaniques, ces quantités se sont souvent présentées comme les accroissements correspondants de variables liées entre elles par des relations connues. Nous sommes parvenus à la détermination des limites des sommes ou des rapports de ces quantités par des procédés indiqués par la nature de la question, mais qui ne se rattachaient pas à des méthodes générales. Nous allons actuellement nous occuper spécialement de ces méthodes générales dont l'utilité

doit être beaucoup mieux sentie, d'après toutes les applications que nous savons qu'elles auront.

En conséquence, l'objet principal du second livre sera la détermination des limites des rapports des accroissements des variables liées entre elles par des équations données, ou les limites des sommes d'infiniment petits dont l'expression générale est donnée. Cet objet est purement algébrique. Les applications que nous en ferons auront pour but d'abord d'éclaircir l'usage des formules et des notations particulières et quelquefois compliquées que nous y ferons connaître, et ensuite d'étendre et généraliser des théories exposées dans ce premier livre.

Digitized by Google

LIVRE II.

CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS. CALCUL INVERSE OU INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE PREMIER.

DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL ET DE LA CONTINUITÉ. GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DES LIMITES.

165. On désigne sous le nom de *variable* toute quantité qui, dans la question où on la considère, est susceptible de recevoir successivement différentes valeurs.

On nomme *variables indépendantes* celles dont les valeurs sont entièrement arbitraires; et *variables dépendantes* ou *fonctions*, celles dont les valeurs sont déterminées par celles de certaines autres quantités, quelle que soit la nature de cette dépendance, et soit qu'il s'agisse de quantités concrètes ou de quantités évaluées en nombres. Dans le premier cas, on a des *fonctions concrètes;* et dans le second, des *fonctions analytiques.*

Les fonctions analytiques se distinguent en fonctions *explicites* et fonctions *implicites.* Les premières sont celles dont les valeurs peuvent s'obtenir au moyen d'opérations indiquées et que l'on sait effectuer; les autres sont celles qui sont liées aux variables indépendantes par des équations non résolues : dans ce cas, les opérations à effectuer pour former les valeurs des fonctions ne sont pas indiquées. On les connaitrait par la résolution des équations données, et les fonctions deviendraient alors explicites.

Les fonctions explicites se subdivisent ordinairement en *algébriques* et *transcendantes*. Les premières sont celles où les seules opérations indiquées sont des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances et extractions de racines de degrés connus ; les autres sont celles qui renferment d'autres opérations indiquées sur les variables : comme, par exemple, les quantités exponentielles, les logarithmes, les lignes trigonométriques, etc.

Lorsqu'une seule de ces diverses opérations est indiquée sur une variable, on a une fonction *simple* de cette variable. Lorsque plusieurs d'entre elles sont accumulées les unes sur les autres, on a ce que l'on appelle une *fonction de fonctions*. Toutes les fonctions qui ne rentrent pas dans ces deux cas se nomment *fonctions composées*.

Lorsque deux variables sont liées par une équation quelconque, elles sont fonctions l'une de l'autre. La forme de ces deux fonctions est différente si les deux variables n'entrent pas dans l'équation d'une manière symétrique. On leur donne, l'une par rapport à l'autre, le nom de *fonctions inverses*. Si, par exemple, on résout par rapport à x les équations suivantes, qui sont résolues par rapport à y,

$$y = x^m, \quad y = a^x, \quad y = \sin x, \ldots,$$

on obtient

$$x = \sqrt[m]{y}, \quad x = \log y, \quad x = \text{arc} \sin y.$$

Ainsi, d'après notre définition, la racine $m^{ième}$ est la fonction inverse de la puissance m ; le logarithme est la fonction inverse de l'exponentielle, etc.

166. *Continuité.* — Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre, sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

Une fonction est dite *continue* lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend, elle est constamment réelle et varie elle-même d'une manière continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les intermédiaires. Une fonction peut être continue tant que les variables dont elle dépend restent renfermées entre certaines limites, et cesser de l'être, ou devenir discontinue, en dehors de ces limites.

Pour démontrer qu'une fonction qui est réelle entre certaines limites de la variable est continue, il suffit de faire voir que l'on peut faire croître la variable par degrés assez petits pour que les accroissements correspondants de la fonction soient moindres qu'une grandeur quelconque : car, si cette fonction n'était pas continue, il faudrait qu'elle passât brusquement d'une certaine valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie; ce qui est absurde, puisque l'accroissement de la fonction peut être rendu moindre que toute grandeur donnée. C'est ainsi que, dans les éléments, on a démontré que toutes les fonctions simples sont continues, et que, par conséquent, il en est de même des fonctions composées. Réciproquement, toute fonction continue d'une variable jouit de la propriété, que ses accroissements peuvent devenir moindres que toute quantité donnée, pourvu que l'on donne des valeurs suffisamment petites aux accroissements de la variable : car, si l'accroissement donné à la variable, à partir d'une de ses valeurs, tendait vers zéro, sans qu'il en fût ainsi de l'accroissement de la fonction, il en résulterait que la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, et que, par conséquent, elle ne serait pas continue.

Si l'on considère les valeurs d'une fonction continue comme des ordonnées, et les valeurs correspondantes de

la variable indépendante comme des abscisses, les points ainsi obtenus se suivront sans interruption et formeront une ligne continue, qui sera la représentation géométrique de la fonction analytique.

Généralisation de la méthode des limites.

167. Nous avons dit, dans le premier livre, qu'on appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont elle approche *indéfiniment*, c'est-à-dire de telle sorte que leur différence puisse devenir moindre que toute grandeur assignée, sans cependant se réduire jamais rigoureusement à zéro; et nous avons d'abord fait cette remarque bien simple, qu'une même quantité ne peut tendre en même temps vers deux limites inégales.

Nous en avons conclu que si deux quantités variables dépendent de certaines autres, de telle sorte qu'elles restent constamment égales entre elles dans tous les états par lesquels elles passent, et que l'on sache que l'une d'elles tend vers une limite, on peut affirmer que l'autre a la même limite : car, puisqu'elle est toujours égale à la première, elle s'approchera indéfiniment de la quantité fixe dont celle-ci est supposée s'approcher indéfiniment.

Cela posé, considérons une équation dont les deux membres soient des *fonctions continues* quelconques de variables x, y, z, etc., dépendantes ou indépendantes les unes des autres, et représentons-la par

$$F(x, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots).$$

Supposons que les variables x, y, z, etc., tendent simultanément, d'une manière continue ou discontinue, vers les limites respectives a, b, c, etc., dont quelques-unes pourraient être zéro; et proposons-nous de découvrir la relation qui lie entre elles ces limites, en admettant

que les fonctions restent continues dans le voisinage de ces valeurs des variables. Pour cela, observons que, F et f désignant des fonctions continues de x, y, z, etc., elles subissent des accroissements très-petits lorsque ces variables changent elles-mêmes de quantités très-petites, et que ces accroissements correspondants tendraient en même temps vers la limite zéro : donc, si l'on conçoit que x, y, z, etc., tendent simultanément, et suivant des lois quelconques, vers les limites a, b, c, les fonctions $F(x, y, z, \ldots)$, $f(x, y, z, \ldots)$ tendront indéfiniment vers $F(a, b, c, \ldots)$, $f(a, b, c, \ldots)$. Mais les limites de quantités égales sont égales : donc on aura nécessairement

$$F(a, b, c, \ldots) = f(a, b, c, \ldots),$$

c'est-à-dire que la relation entre les limites sera identiquement la même que celle qui avait lieu constamment entre les variables ; et qu'il suffit de changer dans celle-ci les variables dans leurs limites, pour avoir la relation qui existe entre ces dernières.

Si cette substitution introduisait des indéterminations apparentes, on les ferait disparaître par des procédés que nous aurons occasion de faire connaître par la suite.

C'est ainsi que se trouve généralisée la proposition qui sert de base à la méthode des limites ; et la méthode elle-même consiste à considérer les quantités dont on veut découvrir la relation, comme limites de quantités plus simples, et à chercher la relation de ces dernières. Lorsqu'elle est établie, il ne reste plus, d'après le théorème précédent, qu'à substituer à toutes les variables leurs limites respectives.

Les quantités variables qui ont pour limites les quantités proposées peuvent être choisies de bien des manières différentes, comme nous avons déjà eu l'occasion de le

dire, et ce choix est très-important. Les calculs peuvent être très-simples ou très-compliqués, suivant la nature de ces variables; et dans chaque cas particulier il faudra s'attacher d'abord à reconnaître quelles sont celles qui donneront le plus de facilité au calcul. Ainsi, par exemple, quand on cherche la relation entre les surfaces de deux cercles et leurs rayons, on considère ces cercles comme limites de polygones réguliers semblables, parce que la relation entre ces polygones et les rayons des cercles est très-facile à obtenir; tandis qu'elle aurait été très-difficile à découvrir si l'on avait supposé différents les nombres des côtés des deux polygones, et que de plus on ne les eût pas supposés réguliers. Au reste, si cette dernière était découverte, elle conduirait nécessairement à la même relation entre les cercles et leurs rayons, et le choix des variables n'a d'autre effet que de conduire plus ou moins simplement au résultat. Mais il n'y a aucune règle précise à donner à ce sujet.

CHAPITRE II.

DES DÉRIVÉES, DES DIFFÉRENCES ET DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE. NOTATIONS.

168. Nous avons démontré (n° 69) que le rapport des accroissements infiniment petits correspondants d'une fonction et de la variable dont elle dépend, tend en général vers une limite déterminée, et nous avons nommé cette limite *dérivée de la fonction par rapport à la variable indépendante.*

L'accroissement positif ou négatif d'une variable quelconque, dépendante ou indépendante, se nomme la *différence* de cette variable, et se désigne par la caractéristique Δ suivie de la lettre qui représente la variable.

Ainsi Δx, Δy, Δz, etc., représentent les différences ou accroissements des variables x, y, z, etc.

La dérivée d'une fonction se désigne, comme nous l'avons déjà dit, par la lettre même qui désigne cette fonction, affectée d'un accent : de sorte que les dérivées par rapport à x des fonctions $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, etc., s'écriront ainsi :

$$F'(x), \quad f'(x), \quad \varphi'(x), \ldots.$$

Ainsi, d'après la notation des différences, si l'on désigne une fonction quelconque $F(x)$ par y, on aura, en supposant que Δx et Δy tendent vers zéro,

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x),$$

et, par conséquent, en représentant par α une certaine

quantité tendant vers zéro en même temps que Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \alpha, \quad \text{et} \quad \Delta y = F'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

169. Cette dernière expression nous fait voir que l'accroissement infiniment petit d'une fonction quelconque peut être considéré comme composé de deux parties, dont l'une $\alpha \Delta x$ est infiniment petite par rapport à l'autre qui est $F'(x)\,\Delta x$. Or nous savons que les limites des sommes ou des rapports d'infiniment petits, ne sont pas altérées lorsqu'on remplace ces infiniment petits par d'autres qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux. Donc, toutes les fois que Δy entrera dans un calcul comme terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherchera la limite, on pourra le remplacer par $F'(x)\,\Delta x$, c'est-à-dire par le produit de la dérivée de y par l'accroissement infiniment petit de la variable indépendante x.

On donne le nom de *différentielles* à ces quantités que l'on peut substituer aux différences infiniment petites des fonctions. Elles sont plus simples, puisqu'on néglige dans celles-ci le terme $\alpha \Delta x$ qui est presque toujours excessivement compliqué. Ce sont même les plus simples quantités que l'on puisse considérer au lieu de l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement arbitraire Δx, puisque c'est le simple produit de ce Δx par une fonction où Δx n'entre pas.

Les *différentielles*, ces quantités infiniment petites, plus simples, que l'on peut substituer aux différences elles-mêmes, se désignent par la caractéristique d, au lieu de Δ, et comme elles ne sont autre chose que le produit de la dérivée de la fonction par l'accroissement de la variable, on aura

$$dy = F'(x)\,\Delta x \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{\Delta x} = F'(x);$$

la différentielle est donc une quantité dont le rapport à l'accroissement de la variable est égal à la limite du rapport de la différence de la fonction à ce même accroissement. On voit que la recherche de la dérivée ou celle de la différentielle d'une fonction sont une seule et même question.

170. Si l'on suppose que la fonction y soit x lui-même, on aura

$$\Delta y = \Delta x, \quad F'(x) = 1 \quad \text{et} \quad dy = \Delta x.$$

Ainsi la différentielle de la fonction y, qui dans ce cas est x, est identique à Δx, c'est-à-dire que l'on a

$$dx = \Delta x;$$

et, comme il est plus naturel d'employer une seule caractéristique quand cela est possible, toutes les fois qu'il s'agira de différentielle de fonctions de x nous représenterons l'accroissement de x par dx; et, lorsqu'il s'agira des accroissements exacts désignés par la caractéristique Δ, nous représenterons l'accroissement de x par Δx.

Remarque. — Si, dans une même question, on a à considérer une variable indépendante x et plusieurs fonctions y, z, u, v, etc., de cette variable; que l'on représente par Δy, Δz, Δu, Δv, etc., les accroissements de ces fonctions, correspondants à un même accroissement Δx de x; et par dy, dz, du, dv, etc., leurs différentielles correspondantes à $dx = \Delta x$: toutes ces différentielles seront dans des rapports constants avec dx et, par conséquent, les unes avec les autres, à mesure que dx tendra vers zéro. Ces rapports constants seront évidemment les limites des rapports des différences correspondantes, qui ne diffèrent des différentielles que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes.

Ainsi, par exemple, on aura

$$\frac{dv}{dy} = \lim. \frac{\Delta v}{\Delta y},$$

de sorte que $\frac{dv}{dy}$ est la dérivée de v par rapport à y, quelle que soit la variable commune par rapport à laquelle on ait pris les différentielles dv et dy. Ce qu'on peut encore exprimer d'une autre manière en observant que $\frac{dv}{dy}$ est le rapport de $\frac{dv}{dx}$ à $\frac{dy}{dx}$, et on obtient cette proposition que *la dérivée d'une variable v par rapport à une autre variable y, est égale au rapport des dérivées de v et y par rapport à une même variable quelconque x, dont elles peuvent être considérées comme dépendantes.*

Des fonctions simples, des fonctions de fonctions et des fonctions composées.

171. La manière dont une quantité peut dépendre d'une autre est susceptible d'une variété indéfinie. Parmi toutes les formes possibles de fonctions, on en a choisi un certain nombre très-limité, auxquelles on est convenu de chercher à ramener toutes les autres. Elles sont telles, que, soit par les premières opérations de l'arithmétique, soit au moyen des Tables construites d'avance, on peut, avec un degré suffisant d'approximation, obtenir leurs valeurs correspondantes à des valeurs numériques quelconques de la variable dont elles dépendent.

Ces fonctions, que l'on désigne sous le nom de *fonctions simples*, sont les suivantes, dans lesquelles a désigne une quantité indépendante de la variable x : $a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^m (m étant un nombre réel quelcon-

que), a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$, $\sec x$, $\cosec x$; et les fonctions inverses $\log x$, $\arc \sin x$, $\arc \cos x$, $\arc \tang x$, $\arc \cot x$, $\arc \sec x$, $\arc \cosec x$.

Une fonction quelconque de x peut être soumise aux opérations qui constituent une nouvelle fonction; on a alors une fonction d'une fonction de x. En la considérant elle-même comme une variable, on peut encore la soumettre aux opérations qui constituent une nouvelle fonction, et ainsi de suite. Les fonctions obtenues de cette manière se nomment, en général, des *fonctions de fonctions*.

Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs fonctions de x, on la nomme une *fonction composée de x*, et c'est le cas le plus général des fonctions *explicites*, c'est-à-dire de celles qui sont l'indication d'opérations qu'on sait effectuer.

Dans tous les cas, lorsque deux fonctions, renfermant un nombre quelconque de variables dépendantes d'une seule, sont toujours égales, quelque valeur qu'on donne à cette variable, il est clair que leurs accroissements correspondants sont toujours égaux, et que, par conséquent, leurs dérivées par rapport à cette variable le sont aussi, ainsi que leurs différentielles.

D'où il résulte que, *quand une équation a lieu pour toute valeur de la variable indépendante, les dérivées ou les différentielles de ses deux membres par rapport à cette variable sont égales, quelque valeur qu'on lui donne.*

Nous allons faire connaître les principes au moyen desquels la détermination des différentielles ou des dérivées de toutes ces fonctions se ramène à celles des différentielles ou des dérivées des fonctions simples.

Différentiation des fonctions de fonctions.

172. Considérons une fonction u de x, déterminée par la suite d'équations

$$u = F(z), \quad z = f(y), \quad y = \varphi(x),$$

et cherchons sa dérivée par rapport à x, ou la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, dont les deux termes tendent vers zéro, opération qu'on appelle *différentiation*. Soient Δu, Δz, Δy les accroissements de u, z, y correspondants à l'accroissement Δx de x; on aura identiquement

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

d'où, en observant que la limite d'un produit est le produit des limites,

$$\lim. \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim. \frac{\Delta u}{\Delta z} \cdot \lim. \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(z) f'(y) \varphi'(x).$$

Donc la dérivée de u par rapport à x est le produit des dérivées de u par rapport à z, de z par rapport à y, et de y par rapport à x.

Si l'on représente la dérivée de u par rapport à x par le rapport des différentielles, on aura

$$\frac{du}{dx} = F'(z) f'(y) \varphi'(x),$$

ou

$$du = F'(z) f'(y) \varphi'(x)\, dx.$$

C'est en cela que consiste le principe de la différentiation des fonctions de fonctions. Il a lieu évidemment, quel que soit le nombre des fonctions accumulées; et il

ramène à la simple différentiation de chacune de ces fonctions, considérée isolément.

Différentiation des fonctions inverses.

173. Si l'on désigne une fonction $F(x)$ par y, c'est-à-dire si l'on pose

$$y = F(x),$$

et qu'en résolvant par rapport à x, on en tire

$$x = \varphi(y),$$

on dit que les fonctions F et φ sont inverses l'une de l'autre.

Cela posé, ces deux équations étant les mêmes sous une forme différente, elles donneront les mêmes accroissements correspondants pour x et y. Soient Δx, Δy ces accroissements, on aura

$$F'(x) = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim. \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[F(x)]};$$

d'où il résulte que, pour avoir la dérivée d'une fonction $F(x)$ inverse de la fonction $\varphi(x)$, dont on sait trouver la dérivée, il suffira de prendre la réciproque de la fonction dérivée φ', et de placer sous ce signe la fonction proposée $F(x)$.

Expression de l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables dépendantes ou indépendantes.

174. Considérons une fonction y qui dépende de deux variables u, v, et soit

$$y = F(u, v).$$

Si l'on donne à u et v des accroissements infiniment petits

Δu, Δv dépendants ou indépendants l'un de l'autre, suivant que u et v le seront eux-mêmes, l'accroissement correspondant de y sera

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v)$$

et pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta y = {} & F(u + \Delta u, v) - F(u, v) \\ & + F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v).\end{aligned}$$

Les deux premiers termes peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u} \Delta u.$$

Le coefficient de Δu ne diffère que d'une quantité infiniment petite de la dérivée de $F(u, v)$ par rapport à u, v étant considéré comme constant. Soit $F_1(u, v)$ cette dérivée, que l'on appelle *dérivée partielle* de $F(u, v)$, ou de y, par rapport à u; l'expression précédente pourra se mettre sous la forme

$$[F_1(u, v) + \alpha]\Delta u,$$

α désignant une quantité qui devient nulle avec Δu.

La seconde partie peut se mettre sous la forme

$$\frac{F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v)}{\Delta v} \Delta v,$$

et le coefficient de Δv ne différera de la dérivée de $F(u + \Delta u, v)$ par rapport à v considéré comme seule variable, que d'une quantité β qui deviendra nulle avec Δv. Soit $F_2(u, v)$ la dérivée partielle de $F(u, v)$ par rapport à v; on pourra donc mettre la seconde partie de Δy sous la forme

$$[F_2(u + \Delta u, v) + \beta]\Delta v,$$

β devenant nul avec Δv.

Mais $F_2(u+\Delta u, v)$ ne diffère de $F_2(u, v)$ que d'une quantité qui deviendra nulle avec Δu; l'ajoutant avec β, et en désignant leur somme par α', la seconde partie de Δy aura pour valeur

$$[F_2(u, v) + \alpha']\Delta v;$$

et par conséquent, en réunissant les deux parties de Δy,

$$\Delta y = [F_1(u, v) + \alpha]\Delta u + [F_2(u, v) + \alpha']\Delta v.$$

Or $\alpha\Delta u$, étant infiniment petit par rapport à la première partie, l'est par rapport à Δy lui-même; et il en est de même de $\alpha'\Delta v$, soit que Δu et Δv soient dépendants ou indépendants l'un de l'autre. Donc, en désignant par ω une quantité infiniment petite par rapport à Δy, on aura

$$\Delta y = F_1(u, v)\Delta u + F_2(u, v)\Delta v + \omega.$$

On représente les dérivées partielles $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ par $\frac{dF(u, v)}{du}$, $\frac{dF(u, v)}{dv}$, ou $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, mais il faut bien se rappeler que ces deux dy sont différents et représentent les différentielles de y relatives à la variation d'une seule des quantités u, v : on les nomme les différentielles partielles de y par rapport à u ou à v. Euler avait proposé d'écrire ainsi ces dérivées partielles : $\left(\frac{dy}{du}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$. On a supprimé, depuis, ces parenthèses, parce qu'avec un peu d'attention, toute méprise est impossible. L'équation précédente s'écrira alors de cette manière :

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \omega;$$

et il est bon de se rappeler que ω se compose d'abord d'une partie qui, divisée par Δu, devient encore nulle quand on y fait $\Delta u = 0$, et d'une autre partie qui, après

avoir été divisée par Δv, contient des termes qui deviennent nuls, les uns quand on y fait $\Delta u = 0$, et les autres quand on y fait $\Delta v = 0$.

On aurait des résultats analogues pour un nombre quelconque de variables u, v, etc., soit entièrement indépendantes, soit dépendantes les unes des autres, ou d'autres variables quelconques.

Différentiation des fonctions composées.

175. Soient

$$y = F(u, v, w, \ldots)$$

et

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = \psi(x), \ldots;$$

y sera alors une fonction composée, relativement à x.

Pour avoir sa dérivée, on remarquera que, d'après ce qui précède, on a, en supposant les accroissements infiniment petits,

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \frac{dy}{dv}\Delta v + \frac{dy}{dw}\Delta w + \ldots + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δy.

Divisant par Δx et passant aux limites, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \ldots,$$

expression dans laquelle il ne faut pas oublier que $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$ sont les dérivées partielles de la fonction y. Si x entrait explicitement dans $F(u, v, w, \ldots)$, par exemple si u n'était autre chose que x, $\frac{dy}{du}$ deviendrait $\frac{dy}{dx}$ et serait la dérivée partielle de la fonction par rapport à x;

tandis que le $\frac{dy}{dx}$ du premier membre est la dérivée totale de la fonction dans laquelle on fait varier toutes les quantités dépendantes de x. On ne se méprendra jamais sur le sens de ces notations : c'était pour éviter toute crainte à ce sujet, qu'Euler avait proposé, comme nous l'avons dit, de mettre en deux parenthèses les dérivées partielles ; mais on a renoncé à cette précaution.

L'équation ci-dessus donne, en multipliant les deux membres par dx,

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \ldots,$$

que l'on écrit quelquefois ainsi :

$$dy = d_u y + d_v y + d_w y + \ldots.$$

On peut donc énoncer ainsi le principe de la différentiation des fonctions composées :

La différentielle d'une fonction composée est égale à la somme de ses différentielles partielles, relatives à chacune des variables qui y entrent explicitement.

Quant aux différentielles du, dv, etc., de ces dernières, elles se rapportent toutes à la différentielle dx de la variable unique dont elles dépendent.

176. *Théorème des fonctions homogènes.* — La différentiation des fonctions composées donne la démonstration d'un théorème remarquable sur les fonctions homogènes. On dit qu'une fonction de plusieurs variables est homogène et du degré m, lorsqu'en multipliant chaque variable par une indéterminée t, la fonction se trouve multipliée par t^m.

Cela posé, soient $u = F(x, y, z, \ldots)$ une fonction homogène du degré m, et $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\psi(x, y, z, \ldots)$, etc., ses dérivées partielles par rapport à x, y, etc. ; on aura,

d'après la définition précédente.

$$(1) \qquad F(tx, ty, tz, \ldots) = t^m F(x, y, z).$$

Différentiant les deux membres par rapport à la variable t seulement, il vient

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots)x + \psi(tx, ty, tz, \ldots)y + \ldots = mt^{m-1} F(x, y, z);$$

faisant $t = 1$ dans cette identité, on aura la suivante :

$$(2) \qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} + \ldots = mu.$$

C'est en cela que consiste le théorème des fonctions homogènes.

On peut remarquer que si, dans l'identité (1), on suppose $t = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{F(x, y, z, \ldots)}{x^m} = F\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \ldots\right).$$

Ainsi une fonction homogène de degré m, divisée par la puissance m d'une des variables, ne dépend plus que des rapports des autres variables à la première.

Différentielle d'une somme, d'un produit ou d'un quotient.

177. La règle précédente, appliquée à une somme de termes, montre que la différentielle d'une pareille fonction est la somme des différentielles de chacun de ses termes, ce qui était d'ailleurs évident de soi-même.

Si l'on suppose maintenant $y = uvw\ldots$, la même règle donnera, en observant qu'en général $d[AF(x)] = A\,dF(x)$, si A est un coefficient constant,

$$dy = vw\ldots du + uw\ldots dv + uv\ldots dw + \ldots,$$

ou

$$dy = uvw\ldots\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\right)\ldots$$

Soit encore $y = \frac{u}{v}$, d'où $vy = u$. En prenant les différentielles des deux membres, on aura

$$ydv + vdy = du,$$

d'où

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{ydv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2};$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Ces trois règles sont d'un usage très-fréquent.

Comment la différentiation de toute fonction explicite se ramène à celle des fonctions simples.

178. Considérons maintenant une fonction explicite quelconque de x : elle indique une suite d'opérations à effectuer, dès que l'on aura choisi arbitrairement une valeur numérique pour x. Celle de ces opérations qui doit se faire la dernière, et dont le résultat est la valeur de la fonction, porte soit sur une seule, soit sur deux quantités variables avec x; dans ce dernier cas la différentielle de cette fonction se ramène, par le théorème des fonctions composées, au cas où une seule des deux quantités serait variable, et alors on n'a plus à considérer qu'une fonction simple. Si donc on savait trouver les différentielles de toutes les fonctions simples, on saurait trouver celle de la fonction proposée, au moyen des différentielles des quantités sur lesquelles doit s'exécuter la dernière opération. La question est donc ramenée à déterminer ces différentielles, qui sont celles de fonctions moins compliquées

que la proposée, et qui se ramèneront semblablement à d'autres fonctions encore moins compliquées, jusqu'à ce que l'on parvienne à des fonctions simples.

Tout se réduit donc à la différentiation de ces dernières, et c'est de quoi nous allons nous occuper présentement.

Différentiation des fonctions simples.

179. *Différentielle de $\log x$.* — Soit $y = \log x$; ce logarithme étant pris dans une base quelconque a, on aura

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Posons $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$, et substituons dans le second membre, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or on sait que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la base e du système de Néper, lorsque α tend vers zéro (*voir* la note I à la fin). Donc la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $\frac{\log e}{x}$.

On peut donc écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}, \quad \text{ou} \quad dy = \frac{\log e}{x}\,dx.$$

Si l'on observe que $\log e = \frac{1}{\mathrm{l}a}$, l désignant les loga-

rithmes népériens, on pourra écrire

$$dy = \frac{dx}{x\,\mathrm{l}a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}a};$$

si $a = e$, on aura $y = \mathrm{l}x$,

$$dy = \frac{dx}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Dans le cas où $a = 10$, le module $\log e$ a pour valeur $\log e = 0,4342945\ldots$.

180. *Différentielle de a^x.* — Soit maintenant la fonction inverse $y = a^x$. D'après la règle donnée en général pour les fonctions inverses, et dont on pourrait refaire la démonstration sur chaque cas particulier, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e} = a^x\,\mathrm{l}a,$$

et, par suite,

$$dy = a^x\,\mathrm{l}a\,dx.$$

On pourrait aussi trouver directement la différentielle de a^x, et en déduire celle de la fonction inverse $\log x$. En effet, si l'on a $y = a^x$, on aura

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Tout se réduit donc à trouver la limite de $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, ou, pour plus de commodité, de $\frac{a^\alpha - 1}{\alpha}$, α tendant vers zéro.

Posons

$$a^\alpha - 1 = \beta, \quad \text{d'où} \quad a^\alpha = 1 + \beta,$$

et, par suite,

$$\alpha \, la = l(1+\delta);$$

d'où il résulte

$$\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \frac{\delta}{l(1+\delta)} \, la = \frac{la}{l(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}}.$$

Or, δ tendant vers zéro, $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ a pour limite e; donc

$$\text{lim.} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = la,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, la, \quad \text{et} \quad dy = a^x \, la dx.$$

181. *Différentielle de x^m.* — Soit $y = x^m$; on aura, en prenant les logarithmes des deux membres dans la base e,

$$ly = m \, lx;$$

prenant maintenant les différentielles des deux membres, il vient

$$\frac{dy}{y} = m \frac{dx}{x}, \quad \text{d'où} \quad dy = \frac{my}{x} dx.$$

Remplaçant y par x^m, on aura, quel que soit m,

$$dy = mx^{m-1} dx, \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Si y et x n'étaient pas positifs, les logarithmes seraient imaginaires; on évitera cette difficulté en élevant au carré les deux membres de l'équation $y = x^m$, ce qui donne

$$y^2 = (x^2)^m,$$

et, prenant les logarithmes,

$$ly^2 = m \, lx^2.$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$\frac{d.(y^2)}{y^2} = m\,\frac{d.(x^2)}{x^2};$$

et, comme on reconnaît facilement que l'on a

$$d.(y^2) = 2ydy, \quad d.(x^2) = 2xdx,$$

cette équation deviendra

$$\frac{dy}{y} = \frac{mdx}{x},$$

et, par suite,

$$dy = mx^{m-1}\,dx, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

comme dans le premier cas.

Dans le cas particulier de $m = -1$, on trouve

$$d.\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Si $m = \frac{1}{2}$, on a

$$d.\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

On peut parvenir directement à la différentielle de x^m. Si l'on suppose d'abord m entier et positif, on aura, en désignant x^m par y,

$$\Delta y = mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta^2 x^2 + \ldots;$$

divisant par Δx et passant à la limite, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}.$$

Soit maintenant $m = \frac{p}{q}$, p et q étant entiers et positifs, on aura

$$y = x^{\frac{p}{q}}, \quad \text{d'où} \quad y^q = x^p.$$

Différentiant les deux membres, il vient

$$qy^{q-1}\,dy = px^{p-1}\,dx;$$

d'où

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\,dx = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx.$$

Cette formule étant vraie, quelque valeur commensurable qu'ait m, est encore vraie lorsqu'il est incommensurable.

Soit enfin $m = -n$, n étant un nombre quelconque positif, on aura

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad \text{d'où} \quad yx^n = 1.$$

Différentiant les deux membres, il vient, en appliquant au premier membre la règle des fonctions composées,

$$x^n\,dy + nx^{n-1}y\,dx = 0;$$

d'où

$$dy = -nx^{-n-1}\,dx = mx^{m-1}\,dx.$$

Ainsi, quelque valeur qu'ait m, la différentielle de x^m est, comme nous l'avions déjà trouvée, $mx^{m-1}\,dx$.

182. *Différentielles de sin x, tang x, séc x.* — Les lignes trigonométriques étant des fonctions de l'arc correspondant (*voir*, dans les applications géométriques, l'article sur la longueur des lignes courbes), nous pouvons chercher l'expression de leurs différentielles correspondantes à celle de l'arc. Dans tous ces calculs nous supposerons que le rayon soit pris pour unité.

1°. Soit d'abord

$$y = \sin x,$$

il en résultera

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Or, lorsqu'un arc tend vers zéro, le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, ainsi que le rapport de la tangente à l'arc, ou du sinus à la tangente; donc

$$\lim. \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1:$$

la limite du second membre est donc $\cos x$.

On a donc

$$\frac{dy}{dx} = \cos x;$$

on en déduit

$$dy = \cos x dx,$$

ou

$$d.\sin x = \cos x dx.$$

2°. Soit maintenant $y = \operatorname{tang} x$; on aura

$$\Delta x = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang}\Delta x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang}\Delta x} - \operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang}\Delta x(1 + \operatorname{tang}^2 x)}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang}\Delta x},$$

d'où

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tang}\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2 x}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang}\Delta x};$$

et passant aux limites,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et, par suite,

$$dy = d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

On arriverait au même résultat en considérant que $\tang x$ égale $\frac{\sin x}{\cos x}$, et appliquant la règle pour différentier les fractions.

Soit enfin $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$; on aura, par la règle des fractions,

$$dy = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \tang x \sec x dx :$$

ainsi $d.\sec x = \tang x \sec x dx$.

On y parviendra encore en observant que

$$\Delta y = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{1}{\cos x},$$

et développant les calculs comme dans les cas précédents.

3°. *Différentielles de $\cos x$, $\cot x$, $\cosec x$.* — Considérons maintenant les mêmes fonctions du complément $\frac{\pi}{2} - x$ de l'arc x.

Observons pour cela que l'on aura en général, en regardant $\frac{\pi}{2} - x$ comme une fonction de x, et appliquant la règle des fonctions de fonctions,

$$d.\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\mathrm{F}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx.$$

Ainsi, pour les trois fonctions $\cos x$, $\cot x$, $\cosec x$, qui ne sont autres que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\tang\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, il faudra prendre les dérivées des fonctions respectives $\sin x$, $\tang x$, $\sec x$, y changer x en $\frac{\pi}{2} - x$, puis multiplier par $-dx$. On trouvera ainsi :

$$d.\cos x = -\sin x dx, \quad d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$
$$d\ \cosec x = -\cot x \cosec x dx.$$

183. *Différentielles des fonctions trigonométriques inverses.* — Nous avons vu que, pour obtenir la dérivée d'une fonction y de x, il suffisait de diviser l'unité par la dérivée de la fonction inverse, dans laquelle on mettrait y pour variable.

D'après cela, si l'on considère les fonctions $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\,\text{tang}\,x$, $\text{arc}\,\text{séc}\,x$, $\text{arc}\cos x$, $\text{arc}\cot x$, $\text{arc}\,\text{coséc}\,x$ qui ont respectivement pour inverses

$$\sin x, \quad \text{tang}\,x, \quad \text{séc}\,x, \quad \cos x, \quad \cot x, \quad \text{coséc}\,x,$$

on trouvera :

pour $y = \text{arc}\sin x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \text{arc}\,\text{tang}\,x$, $\quad dy = \cos^2 y dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \text{arc}\,\text{séc}\,x$, $\quad dy = \dfrac{dx}{\text{tang}\,y\,\text{séc}\,y} = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

pour $y = \text{arc}\cos x$, $\quad dy = -\dfrac{dx}{\sin y} = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

pour $y = \text{arc}\cot x$, $\quad dy = -\sin^2 x dy = -\dfrac{dx}{1+x^2}$,

pour $y = \text{arc}\,\text{coséc}\,x$, $dy = -\dfrac{dx}{\cot y\,\text{coséc}\,y} = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il faut bien remarquer que les radicaux qui se sont introduits dans ces formules doivent être pris, tantôt avec le signe $+$, tantôt avec le signe $-$; on reconnaîtra celui que l'on doit prendre, en considérant la ligne trigonométrique qui l'a introduit.

Les trois dernières différentielles sont égales aux trois premières, en faisant abstraction des signes, qui peuvent être semblables ou dissemblables; et cela tient à ce que la somme ou la différence des deux arcs correspondants est une constante.

Les signes que nous avons donnés aux radicaux dans ces formules se rapportent au cas où l'arc est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Les différentielles des fonctions trigonométriques, ou *fonctions circulaires*, pourraient encore s'obtenir par des considérations géométriques fort simples, auxquelles nous ne nous arrêterons pas.

184. Le tableau suivant renferme les différentielles de toutes les fonctions simples. Nous y représentons par la lettre caractéristique L les logarithmes dans une base quelconque, et par l ceux qui se rapportent à la base de Néper. Dans les fonctions trigonométriques inverses, les signes des radicaux supposent l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$:

$d.x^n = nx^{n-1}dx$	$d.\sin x = \cos x dx$	$d.\text{arc sin}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.\text{L}x = \text{L}e\frac{dx}{x}$	$d.\text{tang}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$d.\text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}$
$d.\text{l}x = \frac{dx}{x}$	$d.\text{séc}\, x = \text{tang}\, x\, \text{séc}\, x dx$	$d.\text{arc séc}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
$d.a^x = a^x \text{l}\, a dx$	$d.\cos x = -\sin x dx$	$d.\text{arc cos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$d.e^x = e^x dx$	$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$d.\text{arc cot}\, x = -\frac{dx}{1+x^2}$
	$d.\text{coséc}\, x = -\cot x\, \text{coséc}\, x dx$	$d.\text{arc coséc}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Il est bon d'observer que ces différentielles des fonctions simples de x ne supposent nullement que x soit la variable indépendante. Elles correspondent bien à la différentielle dx; mais celle-ci peut dépendre de celle d'une variable quelconque dont x dépendrait, comme aussi elle peut être entièrement indépendante. Ainsi l'on

aurait

$$d.[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1} d.F(x),$$
$$d.\sin[F(x)] = \cos[F(x)] d.F(x), \ldots.$$

C'est cette même considération qui nous a conduits à la différentiation des fonctions de fonctions.

Différentielles des fonctions implicites.

185. Si par fonction implicite on entendait toute fonction dont la forme n'est point donnée explicitement, mais qui est déterminée complétement par les données de la question, on se jetterait dans une trop grande généralité, et il ne serait pas possible de donner des règles générales pour leur différentiation. Nous renfermerons seulement sous cette dénomination les fonctions qui sont liées aux variables dont elles dépendent, par des équations dont les deux membres sont des fonctions explicites de toutes ces quantités.

Nous considérerons d'abord le cas où l'on a une seule équation; ce cas se subdivise en deux autres, suivant que la fonction dépend d'une seule ou de plusieurs variables indépendantes.

Soit d'abord la fonction y déterminée par l'équation

$$F(x, y) = 0.$$

Les dérivées par rapport à x, des deux membres de cette équation, devant être identiques, et y étant une fonction déterminée, quoique inconnue de x, nous aurons, d'après la règle des fonctions composées,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

équation qui détermine la dérivée ou la différentielle de y,

puisque l'on peut former les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ de la fonction explicite $F(x, y)$. On aura ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \quad \text{d'où} \quad dy = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}dx.$$

Ces valeurs de la différentielle et de la dérivée de y sont exprimées au moyen de x et y à la fois; elles ne peuvent l'être au moyen de x seul, que quand on peut résoudre l'équation $F(x, y) = 0$ par rapport à y; mais néanmoins ces formules ne laissent pas que d'être d'une grande utilité dans le cas même où cette résolution est impossible.

186. Considérons maintenant $m - 1$ équations entre m variables; ce qui détermine $m - 1$ d'entre elles en fonction de la $m^{ième}$, qui sera la seule variable indépendante. Soient

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \ldots) &= 0, \\ F_1(x, y, z, \ldots) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{m-2}(x, y, z, \ldots) &= 0; \end{aligned}$$

on trouvera, en différentiant toutes ces équations,

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\frac{dF_1}{dx}dx + \frac{dF_1}{dy}dy + \frac{dF_1}{dz}dz + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dF_{m-2}}{dx}dx + \frac{dF_{m-2}}{dy}dy + \frac{dF_{m-2}}{dy}dz + \ldots = 0. \end{aligned}$$

De ces $m - 1$ équations du premier degré par rapport à

dy, dz, etc., on tirera la valeur de ces $m-1$ inconnues en fonction de x, y, z,... et dx; ce qui était l'objet de la question.

Expression remarquable du rapport des accroissements finis de deux fonctions d'une même variable.

187. Soient $F(x)$, $f(x)$ deux fonctions quelconques, et x_0, X deux valeurs arbitraires de x; X surpassant x_0 d'une quantité finie positive h. Il s'agit de trouver, au moyen des dérivées de ces fonctions, une expression du rapport

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{f(x_0+h)-f(x_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{F(X)-F(x_0)}{f(X)-f(x_0)},$$

en supposant que la fonction $f(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante; ou, en d'autres termes, que sa dérivée soit constamment de même signe, pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et X. Admettons, pour fixer les idées, que $f'(x)$ soit constamment positive entre ces limites; et soient A, B la plus grande et la plus petite valeur que prend entre ces mêmes limites le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$; on aura constamment

$$\frac{F'(x)}{f'(x)} < A, \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} > B.$$

Multipliant par $f'(x)$ qui est positif, on aura les deux inégalités suivantes, qu'il faudrait changer de sens si $f'(x)$ était négatif :

$$F'(x) < Af'(x), \quad F'(x) > Bf'(x).$$

Le premier membre de la première inégalité est la dérivée de $F(x)$, et le second de $Af(x)$, et par conséquent

(n° 72) $F(x)$ croît moins rapidement que $A f(x)$. On a donc

$$F(X) - F(x_0) < A[f(X) - f(x_0)],$$

et divisant par $f(x) - f(x_0)$, qui est positif, par hypothèse,

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} < A.$$

La seconde inégalité conduit de même à

$$\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)} > B.$$

Si donc le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ est continu entre x_0 et X, ce qui arrivera évidemment, par exemple, si $F'(x)$ et $f'(x)$ le sont séparément, il existera une certaine valeur de x intermédiaire entre x_0 et X, telle que ce rapport deviendra égal à $\frac{F(X) - F(x_0)}{f(X) - f(x_0)}$, qui est compris entre la plus grande et la plus petite valeur que prend $\frac{F'(x)}{f'(x)}$. Si l'on désigne cette valeur de x intermédiaire par $x_0 + \theta h$, θ ayant une valeur comprise entre o et $+1$, on parviendra à la formule suivante, dont nous ferons de nombreuses applications :

$$(1) \qquad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}.$$

Si l'on avait supposé $f'(x)$ constamment négatif, les inégalités n'auraient fait que changer de sens, et n'en auraient pas moins conduit à cette même formule. Il faudra bien se rappeler, dans les applications de cette formule, qu'elle suppose que $f'(x)$ soit constamment de même signe entre x_0 et $x_0 + h$, et que le rapport $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ passe par

toutes les valeurs comprises entre sa plus grande et sa plus petite, quand x passe par toutes les valeurs comprises entre x_0 et $x_0 + h$.

188. Nous allons déduire de l'équation (1) quelques propositions qui nous seront fort utiles par la suite.

Si l'on avait pour une valeur particulière x_0 de la variable, $F(x_0) = 0$, $f(x_0) = 0$, la formule (1) deviendrait, en posant $\theta h = h_1$, h_1 étant moindre que h,

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F'(x_0 + h_1)}{f'(x_0 + h_1)}.$$

Si l'on avait, en outre, $F'(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, on aurait semblablement, en représentant par $F''(x)$, $f''(x)$ les dérivées de $F'(x)$, $f'(x)$ ou les secondes dérivées de $F(x)$, $f(x)$,

$$\frac{F'(x_0 + h_1)}{f'(x_0 + h_1)} = \frac{F''(x_0 + h_2)}{f''(x_0 + h_2)},$$

h_2 étant moindre que h_1, et en supposant que $\frac{F''(x)}{f''(x)}$ passe par toutes les valeurs entre sa plus grande et sa plus petite; et, par suite,

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F''(x_0 + h_2)}{f''(x_0 + h_2)}.$$

Si l'on avait $F''(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, on obtiendrait une formule semblable où entreraient les dérivées de $F''(x)$ et $f''(x)$ ou les troisièmes dérivées de $F(x)$, $f(x)$. En continuant ainsi, et désignant, en général, par $\varphi^m(x)$ la fonction qu'on obtient en différentiant successivement m fois la fonction quelconque $\varphi(x)$, on verra que si l'on a les conditions

$$\begin{array}{llll} F(x_0) = 0, & F'(x_0) = 0, \ldots, & F^{n-1}(x_0) = 0, \\ f(x_0) = 0, & f'(x_0) = 0, \ldots, & f^{n-1}(x_0) = 0, \end{array}$$

et que les rapports des dérivées de même ordre, jusqu'à l'ordre n inclusivement, passent par toutes les valeurs entre leur plus grande et leur plus petite, ce qui aura lieu s'ils sont continus, on aura

$$(2)\qquad \frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)},$$

θ désignant une quantité positive moindre que l'unité.

Si toutes les conditions précédentes étaient satisfaites, excepté $F(x_0) = 0$, on aurait

$$(3)\qquad \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{f(x_0+h)} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{f^n(x_0+\theta h)}.$$

189. Comme application de cette dernière formule, supposons que l'on ait

$$f(x) = (x - x_0)^n,$$

et que la fonction $F(x)$ ait toutes ses dérivées continues jusqu'à $F^n(x)$ inclusivement, entre x_0 et $x_0 + h$: les conditions $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0, \ldots, f^{n-1}(x_0) = 0$ seront évidemment satisfaites; et, en supposant toujours que l'on ait

$$F'(x_0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(x_0) = 0,$$

l'équation (3) devient

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h^n} = \frac{F^n(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n};$$

d'où

$$(4)\qquad F(x_0+h) - F(x_0) = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} F^n(x_0+\theta h).$$

On voit que si l'accroissement h de x tendait vers zéro, et que $F^n(x_0)$ fût fini, l'accroissement de $F(x)$, pour la valeur particulière x_0, serait infiniment petit de l'ordre n, celui de x étant du premier.

Si l'on a, en outre, $F(x_0) = 0$, la formule précédente devient

$$(5) \qquad F(x_0 + h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x_0 + \theta h).$$

Si x_0 est zéro, cette équation se change en la suivante :

$$F(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta h),$$

et, changeant l'indéterminée h en x,

$$(6) \qquad F(x) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x),$$

en admettant les conditions

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(0) = 0.$$

On peut remarquer qu'on aurait semblablement

$$F'(x) = \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(\theta_1 x),$$

et que par conséquent, dans ce cas, $F(x)$ *est infiniment petit par rapport à* $F'(x)$.

Si l'on n'avait pas $F(x_0) = 0$, on obtiendrait, au lieu de l'équation (6),

$$(7) \qquad F(x) - F(0) = \frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\theta x).$$

190. Nous déduirons de ce qui précède un corollaire très-simple, et qui nous servira par la suite. Il consiste en ce que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ tend vers zéro en même temps que x, et que $F(x), F'(x), \ldots, F^n(x)$ soient continues entre o et x, la fraction $\frac{F(x)}{x^n}$ pourra se mettre sous la forme $\frac{F^n(\theta x)}{1.2\ldots n}$. En effet, il résulte d'abord de l'hypothèse, que

l'on doit avoir

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, \quad F^{n-1}(0) = 0;$$

car sans cela $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ serait infini, pour $x = 0$. On peut donc appliquer ici la formule (6), et l'on voit, par conséquent, que si $\frac{F(x)}{x^{n-1}}$ devient nul pour $x = 0$, on aura

$$\frac{F(x)}{x^n} = \frac{F^n(\theta x)}{1.2\ldots n}.$$

191. L'équation (4), dans laquelle on suppose $n = 1$, devient, en remplaçant par x la quantité arbitraire x_0,

$$(8) \qquad F(x+h) - F(x) = hF'(x+\theta h).$$

Elle conduit immédiatement à une conséquence déjà obtenue précédemment, savoir : qu'*il n'y a qu'une expression indépendante de x, dont la dérivée par rapport à x soit nulle quel que soit x.*

En effet, soit $F(x)$ une fonction telle, que pour toute valeur de x on ait $F'(x) = 0$; l'équation désignée montre que, quels que soient x et $x + h$, on aura

$$F(x) - F(x+h) = 0,$$

puisque $F'(x+\theta h)$ est nul par hypothèse. Donc $F(x) = F(x+h)$, et par conséquent la fonction $F(x)$ a toujours la même valeur, quelle que soit la valeur de la variable; elle est donc constante relativement à x, ou, en d'autres termes, elle ne dépend pas de x.

D'où résulte, comme nous l'avons déjà dit, que *deux fonctions qui ont la même dérivée par rapport à une même variable, ne peuvent différer que par une constante*, c'est-à-dire par un quantité indépendante de cette variable. En effet, la dérivée de la différence de ces deux fonctions, étant la différence de leurs dérivées, est nulle

d'elle-même, d'après l'hypothèse; donc cette différence est une constante, comme il fallait le démontrer.

192. Nous terminerons par cette proposition très-importante, que *si* $F(x, y)$ *est égal à zéro quel que soit* x, *quand on donne à* y *une certaine valeur particulière* a, *toutes les dérivées de* $F(x, y)$ *par rapport à* x *deviendront aussi nulles, quand on y fera* $y = a$.

En effet, pour toute valeur de x et de h, on aura, en vertu de l'équation (8),

$$(9) \qquad F(x+h, y) - F(x, y) = hF'(x+\theta h, y),$$

la dérivée étant prise par rapport à x.

Or les deux termes du premier membre deviennent nuls pour $y = a$; donc $F'(x+\theta h, a) = 0$.

Et comme x et h sont arbitraires, on peut affirmer que $x+\theta h$ peut prendre toutes les valeurs possibles, bien qu'on ne connaisse pas la valeur de θ; car $x+\theta h$ est toujours compris entre x et $x+h$, et l'on peut faire en sorte que x et $x+h$ comprennent toujours entre eux une valeur arbitraire x' et s'en rapprochent indéfiniment; d'où il suit que $x+\theta h$ peut s'approcher indéfiniment de x', et que, par conséquent, $F'(x, a)$ est nul, quel que soit x.

De là on déduira semblablement que $F''(x, a)$ est nul quel que soit x, et qu'il en est de même, en général, de $F''(x, a)$.

193. Il est encore utile de remarquer que si h tend vers zéro, et y vers a, le second membre de l'équation (9) sera infiniment petit par rapport à h, puisque $F'(x+\theta h, y)$ tendra vers zéro; donc *la différence infiniment petite relative à* x, *d'une fonction* $F(x, y)$ *qui est infiniment petite, quel que soit* x, *est infiniment petite par rapport à l'accroissement correspondant de* x.

Différentielles et différences d'un ordre quelconque de fonctions d'une seule variable.

194. La différentielle dy d'une fonction y de x, étant elle-même une fonction de x, aura aussi sa différentielle, et ce sera une quantité dont le rapport à la différentielle de x sera égal à la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de dy à l'accroissement correspondant de x. Pour plus de simplicité, on prendra pour la différentielle de x, dans cette nouvelle différentiation, la même valeur que dans la première; et, en général, on lui conservera toujours la même valeur pour toutes les différentiations que l'on aura à effectuer; c'est ce que l'on appelle prendre dx constant. Nous représenterons la différentielle de dy par ddy ou d^2y, et nous l'appellerons la différentielle seconde de y par rapport à x. De même d^2y, aura une différentielle que l'on désignera par d^3y, et qui s'appellera la différentielle troisième de y; et ainsi de suite.

Il faut bien se garder de confondre ces indices de différentiation avec des exposants de puissance. Les puissances successives d'une différentielle dy s'écriraient de la manière suivante :

$$dy, \quad dy^2, \quad dy^3, \ldots, \quad dy^n.$$

Rien n'est plus facile que d'exprimer les différentielles successives de la fonction $F(x)$ désignée par y, au moyen de ses dérivées.

En effet, on a d'abord

$$dy = F'(x)dx.$$

Or la différentielle de $F'(x)dx$ sera le produit de dx par sa dérivée par rapport à x, laquelle est $F''(x)\,dx$, puis-

que dx est indépendant de x. On aura donc

$$d^2y = F''(x)dx^2.$$

On aura de même

$$d^3y = F'''(x)dx^3,$$

et généralement

$$d^ny = F^n(x)dx^n,$$

ou

$$\frac{d^ny}{dx^n} = F^n(x);$$

de sorte que les dérivées successives d'une fonction de x peuvent être considérées comme les rapports des différentielles de même ordre de cette fonction aux puissances du même degré de dx.

On voit par là qu'une différentielle d'un ordre n quelconque est en général un infiniment petit de l'ordre n, dx étant pris pour le premier ordre; et que la détermination des dérivées successives d'une fonction ne diffère pas de celle de ses différentielles.

195. Les différentielles successives d'une fonction ont avec les différences de cette fonction des rapports qu'il est essentiel de connaître.

La différence Δy de la fonction y étant elle-même une fonction de x, a aussi une différence; il en est de même de celle-ci, et ainsi de suite indéfiniment. Pour former ces différences successives de la fonction y, on suppose que l'on donne constamment à x le même accroissement Δx, et on les désigne de la manière suivante :

$$\Delta y, \quad \Delta^2 y, \quad \Delta^3 y, \ldots, \quad \Delta^n y.$$

Les puissances de Δy seraient désignées comme il suit :

$$\Delta y, \quad \Delta y^2, \quad \Delta y^3, \ldots, \quad \Delta y^n.$$

Or la proposition que nous allons démontrer consiste en ce que l'on a généralement, $\lim. \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

En effet, on a d'abord

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \omega,$$

ω devenant nul quel que soit x, quand on fait $\Delta x = 0$. Prenons maintenant les accroissements que subiront ces deux membres lorsque l'on augmentera encore x de Δx, et divisons-les par Δx; le premier donnera $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$. Quant au second, il suffira de prendre sa dérivée par rapport à x et d'y ajouter une quantité qui soit infiniment petite en même temps que Δx. Mais ω devenant nul avec Δx, quel que soit x, sa dérivée deviendra nulle en même temps, et par conséquent le second membre diffère de $F''(x)$ d'une quantité qui devient nulle avec Δx. En la désignant par ω_1, nous aurons

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F''(x) + \omega_1;$$

en prenant encore les accroissements des deux membres de cette identité, relatifs à un nouvel accroissement Δx, et les divisant par Δx, on obtiendrait semblablement

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = F'''(x) + \omega_2,$$

et généralement

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) + \omega_{n-1},$$

ω_{n-1} devenant nul avec Δx.

On a donc, en passant aux limites,

$$\lim. \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^n(x) = \frac{d^n y}{d x^n},$$

comme nous l'avions annoncé.

Il suit de là que si l'on fait tendre Δx vers zéro, en prenant $dx = \Delta x$, le rapport $\frac{\Delta^n y}{d^n y}$ aura pour limite l'unité, et *la différentielle de l'ordre n d'une fonction quelconque de x pourra être prise pour la différence du même ordre de cette fonction, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cette différence.*

Cette proposition est très-importante, en ce qu'elle permet de substituer les différentielles d'ordre quelconque aux différences infiniment petites de même ordre, dont l'expression serait beaucoup plus compliquée, et il n'en peut résulter aucune erreur dans les calculs où l'on ne considère que les limites des rapports ou des sommes.

Remarque. — Lorsque plusieurs fonctions, que l'on a à considérer dans une même question, dépendent toutes d'une seule variable x, les différences premières infiniment petites sont toutes déterminées par Δx, ou par une quelconque d'entre elles; ainsi Δy désignera partout le même accroissement, soit qu'on le détermine d'après Δz ou d'après la valeur correspondante de Δx, en supposant toujours que la valeur de x soit la même. Mais le $\Delta^2 y$ n'aura pas la même valeur quand il exprimera la différence de y par rapport à x ou par rapport à z. En effet, dans le premier cas il faut considérer les trois valeurs de y correspondantes à x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$; prendre la différence de la deuxième à la première, et de la troisième à la deuxième, puis la différence de ces deux différences. Dans le second cas, il faudra considérer les trois

valeurs de y qui correspondent à z, $z + \Delta z$, $z + 2\Delta z$, et agir de la même manière sur elles. Or les deux premières sont les mêmes dans les deux cas; mais la troisième est différente parce qu'à $x + 2\Delta x$ ne correspond pas $z + 2\Delta z$: il s'en faut d'une quantité infiniment petite par rapport à Δz, et que l'on n'a pas le droit de négliger par rapport aux différences du second ordre.

Il est donc nécessaire de distinguer avec soin les différences désignées par $\Delta^2 y$, dans les questions où l'on ne prendrait pas toujours la même variable indépendante. Il en serait de même des ordres supérieurs.

196. Si l'on considère en particulier les fonctions

$$x^m, \quad \log x, \quad a^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

on trouvera

$$d^n x^m = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n,$$

$$d^n \log x = \pm 1.2.3\ldots(n-1)\log e \frac{dx^n}{x^n},$$

$$d^n a^x = a^x \ln^n a dx^n,$$

$$d^n \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n,$$

$$d^n \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)dx^n;$$

et il est bon de se rappeler que le second membre donne la valeur de la différence infiniment petite de l'ordre n, à une quantité près infiniment petite par rapport à cette différence.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIELLES, DÉRIVÉES, ET DIFFÉRENCES PARTIELLES DES DIVERS ORDRES, DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES. DIFFÉRENCES ET DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

197. Une fonction de deux variables indépendantes, x et y, peut être différentiée successivement par rapport à chacune d'elles partiellement, et l'on peut supposer que ces différentiations soient en nombre quelconque et se succèdent d'une manière quelconque. Le nombre de ces différentiations constitue l'*ordre* de la différentielle, de la différence ou de la dérivée. Il n'y a rien de nouveau à dire sur leur formation, puisque l'on n'a à considérer à chaque opération qu'une seule variable indépendante. Les dérivées partielles d'ordre quelconque s'exprimeront au moyen des différentielles correspondantes d'une manière entièrement semblable à celle que nous avons trouvée pour les fonctions d'une seule variable. Elles ont aussi les mêmes rapports avec les différences partielles correspondantes; et la reproduction identique des raisonnements déjà faits dans le cas où l'on considère toujours la même variable, conduit immédiatement à ces conséquences. Nous ne croyons cependant pas inutile de donner quelques développements à ce sujet.

Désignons généralement par $F^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\cdots}(x, y)$ le résultat de m dérivations partielles effectuées par rapport à x sur la fonction $u = F(x, y)$, suivies de n dérivations par-

tielles du résultat par rapport à y; lesquelles seront elles-mêmes suivies de p dérivations par rapport à x, et ainsi de suite.

Désignons de même par $d^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots} u$ le résultat obtenu en prenant d'abord la différentielle partielle de l'ordre m de u par rapport à x, puis la différentielle partielle de l'ordre n par rapport à y de l'expression obtenue, et ainsi de suite. Et enfin représentons par $\Delta^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots} u$ le résultat obtenu en prenant d'une manière analogue les différences au lieu des différentielles. Cela posé, on aura d'abord, d'après ce que l'on a vu en traitant les fonctions d'une seule variable, et faisant usage des notations que nous venons d'indiquer,

$$d^m_x u = F^m_x(x, y)\, dx^m.$$

Considérant maintenant y comme la seule variable, et prenant la différentielle $n^{\text{ième}}$ des deux membres, on aura, de la même manière,

$$d^{m+n}_{x,y} u = F^{m+n}_{x,y}(x, y)\, dx^m\, dy^n;$$

prenant maintenant la différentielle partielle d'ordre p par rapport à x, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra

$$d^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots} = F^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots}(x, y)\, dx^m\, dy^n\, dx^p \ldots,$$

ou

$$\frac{d^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots} u}{dx^m\, dy^n\, dx^p \ldots} = F^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\ldots}(x, y).$$

Les dérivées partielles s'expriment donc au moyen des

différentielles partielles correspondantes d'une manière analogue à celle qui se rapporte aux fonctions d'une seule variable.

Il y a encore évidemment le même rapport entre ces dérivées et les différences partielles correspondantes. En effet, on aura d'abord, d'après ce qui a été démontré pour les fonctions d'une seule variable,

$$\frac{\Delta_x^m u}{\Delta x^m} = F_x^m(x, y) + \omega,$$

ω devenant nul en même temps que Δx. Prenons maintenant la différence $n^{ième}$ des deux membres par rapport à y, et divisons-la par Δy^n; il faudra, par les mêmes raisons, prendre la dérivée partielle $n^{ième}$ du second membre par rapport à y et y ajouter une quantité qui devienne nulle avec Δy. Si, de plus, on observe que ω devenant nul avec Δx, il en est de même de sa dérivée $n^{ième}$ par rapport à y, on en conclura l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta_{x,y}^{m+n} u}{\Delta x^m \Delta y^n} = F_{x,y,z\ldots}^{m+n+p\ldots}(x, y) + \omega_1,$$

ω_1 devenant nul quand on suppose que Δx et Δy le deviennent tous les deux.

Prenant actuellement la différence d'ordre p des deux membres par rapport à x, la divisant par Δx^p, et continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra la formule générale

$$\frac{\Delta_{x,y,z\ldots}^{m+n+p\ldots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta x^p \ldots} = F_{x,y,z\ldots}^{m+n+p\ldots}(x, y) + \varepsilon,$$

ε devenant nul quand Δx et Δy le deviennent tous les deux.

D'où l'on conclut enfin, comme pour les fonctions d'une seule variable,

$$\lim. \frac{\Delta^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\cdots} u}{\Delta x^m \Delta y^n \Delta z^p \ldots} = F^{m+n+p\cdots}_{x,y,z\cdots}(x, y) = \frac{d^{m+n+p\cdots}_{x,y,z,\cdots} u}{dx^m\, dy^n\, dz^p \ldots},$$

et il en serait de même pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Les notations que nous venons d'employer peuvent être simplifiées au moyen d'une proposition fondamentale que nous allons démontrer.

198. *De l'ordre dans lequel se succèdent les différentiations.* — Si l'on prend les différences successives d'une fonction par rapport aux diverses variables indépendantes qu'elle renferme, on arrivera toujours au même résultat, dans quelque ordre qu'on effectue ces opérations, pourvu qu'on ne change pas le nombre de celles qui doivent être faites respectivement par rapport à chaque variable.

Soient, en effet, x et y deux des variables dont dépend une fonction u.

Si l'on change d'abord x en $x + \Delta x$, u devient

$$u + \Delta_x u;$$

si dans cette expression on change y en $y + \Delta y$, elle devient

$$u + \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta^2_{x,y} u,$$

et l'on a ainsi ce que devient u quand x et y sont changés en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$.

Or, en faisant les substitutions en sens inverse, on aura

$$u + \Delta_y u + \Delta_x u + \Delta^2_{y,x} u,$$

et ce résultat doit être identique au précédent puisqu'il exprime toujours la fonction u dans laquelle x et y sont changés en $x + \Delta x, y + \Delta y$.

Donc on a identiquement

$$\Delta^2_{x,y} u = \Delta^2_{y,x} u.$$

Si maintenant on divise les deux membres par $\Delta x \Delta y$ et qu'on passe aux limites, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro, on en conclura, par ce qui précède,

$$F''_{x,y}(x, y) = F''_{y,x}(x, y),$$

et, par conséquent,

$$d^2_{x,y} u = d^2_{y,x} u.$$

Si l'on prend successivement un nombre quelconque de différences, de différentielles ou de dérivées partielles, il est facile de voir que l'ordre dans lequel on les prendra est complétement indifférent. En effet, deux de ces opérations successives pouvant être changées d'ordre, on pourra faire arriver au premier rang celle que l'on voudra, en la faisant avancer successivement d'un rang vers le commencement; on amènera ensuite au second rang celle que l'on voudra des autres, et enfin on les placera toutes dans un ordre quelconque, sans que le résultat cesse d'être identiquement le même.

D'après cela, on pourra supposer que toutes les différentiations par rapport à la même variable soient faites consécutivement, et les notations précédentes seront simplifiées en ce qu'elles ne renfermeront qu'une seule indication pour chaque variable : et c'est ce que nous ferons dorénavant.

On simplifie encore l'expression des dérivées partielles

en écrivant $\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}$ au lieu de $\frac{d^{m+n}_{x,y}\,u}{dx^m\,dy^n}$, parce que les exposants de dx et de dy suffisent pour indiquer le nombre des différentiations effectuées par rapport à chacune des variables x et y.

Mais si, pour avoir la différentielle partielle correspondante, on faisait la multiplication par $dx^m\,dy^n$ en supprimant le dénominateur, on obtiendrait $d^{m+n}u$, expression qui ne renfermerait plus aucune trace des différentiations effectuées. On est donc obligé, pour que la notation ait un sens déterminé, de conserver le dénominateur, et d'écrire ainsi cette différentielle,

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}\,dx^m\,dy^n.$$

Elle serait représentée beaucoup plus simplement par la notation déjà employée, $d^{m+n}_{x,y}\,u$.

Le système de notation de Lagrange s'applique aux fonctions de plusieurs variables; mais nous n'en parlerons pas, vu que les géomètres n'en font pas usage. La notation de Leibnitz a prévalu, parce qu'elle a surtout le grand avantage de mettre en évidence les différences infiniment petites, dont la considération est si utile dans toutes les recherches qui dépendent des mathématiques.

Différentielles totales des fonctions de variables indépendantes.

199. Soit

$$u = \mathrm{F}(x, y),$$

x et y étant indépendantes; nous avons vu précédemment que l'on avait

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\,\Delta x + \frac{du}{dy}\,\Delta y + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport à Δx, Δy, Δu, quand Δx et Δy tendent vers zéro.

La somme des deux premiers termes jouit donc, par rapport à l'accroissement total Δu, de cette propriété remarquable, d'être égale à la différence elle-même, à une quantité près infiniment petite par rapport à cette différence. D'après cela, l'analogie nous conduit à donner le nom de différentielle totale de u à l'expression suivante :

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

dx et dy étant des quantités indéterminées et indépendantes que nous nommerons les différentielles de x et y. Elle jouit de la propriété que, lorsque dx et dy seront considérés comme les accroissements infiniment petits donnés à x et y, elle pourra être prise pour l'accroissement total de u en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à cet accroissement.

Nous désignerons cette différentielle totale par du, et il faudra bien la distinguer des du partiels qui se trouvent dans le second membre et sont différents l'un de l'autre. Pour éviter toute confusion, on devra se garder de supprimer les facteurs communs dx et dy, et écrire

$$(1) \qquad du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

On peut encore écrire

$$du = d_x u + d_y u.$$

Ces considérations s'appliquent à un nombre quelconque de variables indépendantes, et *la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes sera toujours la somme de ses différentielles partielles relatives à chacune de ces variables.*

Cherchons maintenant l'expression des différentielles successives de u. Et pour cela remarquons d'abord que la différentielle de $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$ sera, par la règle qui vient d'être démontrée,

$$\frac{d^{n+p+1}u}{dx^{n+1}dy^p}dx + \frac{d^{n+p+1}u}{dx^n dy^{p+1}}dy;$$

elle se formerait donc en multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$ l'expression proposée $\frac{d^{n+p}u}{dx^n dy^p}$, pourvu qu'on y considérât l'indice du numérateur comme un exposant, et qu'après la multiplication on changeât l'exposant des numérateurs en indices de différentiation. D'après cela, si l'on part de la formule (1), la différentielle du second membre s'obtiendra en la multipliant par $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$, et faisant le changement des exposants en indices. Il en sera de même pour la différentielle de ce résultat; et, par conséquent, en désignant par $d^m u$ la différentielle totale de l'ordre m de u, on aura la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

en entendant toujours que les exposants des du dans le second membre seront changés en indices de différentiations.

Comparons maintenant $d^m u$ à la différence totale $\Delta^m u$.

Reprenons pour cela la formule

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y + \omega,$$

dans laquelle nous supposons Δx et Δy infiniment petits; et donnons à x et y les mêmes accroissements

Δx, Δy. L'accroissement de $\frac{du}{dx}$ calculé semblablement s'obtiendrait en multipliant $\frac{du}{dx}$ par $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$, et ajoutant une quantité infiniment petite par rapport à Δx et Δy; il en serait de même pour l'accroissement de $\frac{du}{dy}$. De sorte que l'accroissement de $\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y$ sera représenté symboliquement par le carré de cette expression, dans lequel on changera les exposants de du en indices, plus une quantité infiniment petite par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2. Or nous savons que ω se compose de termes qui ont en facteurs, les uns Δx, les autres Δy, et en outre d'autres facteurs qui deviennent nuls avec Δx et Δy ainsi que leurs dérivées; d'où il suit que l'accroissement de ω sera infiniment petit par rapport aux mêmes quantités Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2. On a donc la formule symbolique

$$\Delta^2 u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^2 + \omega',$$

ω' étant infiniment petit par rapport aux quantités Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2. En continuant ainsi on parviendrait, sans difficulté, quel que fût le nombre des variables, à la formule symbolique générale

$$\Delta^m u = \left(\frac{du}{dx}\Delta x + \frac{du}{dy}\Delta y\right)^m + \omega,$$

ω étant infiniment petit par rapport au produit de m facteurs Δx ou Δy.

On a donc aussi cette autre proposition générale :

La différentielle totale de l'ordre m d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes dans laquelle on prend dx, dy, etc., égaux aux accrois-

sements infiniment petits de ces variables, ne diffère de la différence $m^{ième}$ correspondante, que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même.

Remarque générale. — Lorsque l'on cherchera une équation entre les différentielles d'ordre quelconque de fonctions quelconques, et que, pour y parvenir, il sera avantageux de considérer d'abord des différences infiniment petites, on pourra substituer les différentielles aux différences correspondantes, et négliger toute quantité infiniment petite par rapport à celles entre lesquelles on cherche la relation. Car si l'on divisait l'équation exacte par une des différences, élevée à une puissance convenable, et qu'on passât à la limite, les rapports des différences seraient remplacés par ceux des différentielles, et l'on aurait l'équation même à laquelle on serait parvenu en négligeant des quantités nécessaires pour l'exactitude de l'équation entre les différences, mais qui disparaissent de l'équation exacte entre les différentielles, considérées comme des quantités infiniment petites ou finies.

Différentielles totales des divers ordres des fonctions de plusieurs variables dépendantes.

200. Si les variables x et y, qui entrent dans la fonction u, étaient elles-mêmes des fonctions de variables indépendantes, les différentielles totales de u changeraient toutes de forme, excepté celle du premier ordre, parce que les facteurs dx, dy ne seraient plus constants.

Ainsi la différentielle première de u aurait toujours pour expression

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Mais, en différentiant cette expression, il s'introduirait

les termes

$$\frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et l'on formerait d^2x, d^2y en fonction des variables indépendantes et de leurs différentielles d'après les formules précédentes. On aurait ainsi

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y,$$

et d^2u jouira, par rapport à Δ^2u, de la propriété qui a été démontrée indépendamment de la forme qui pourrait résulter de variables intermédiaires entre u et les variables indépendantes.

On trouverait de même les différentielles totales des ordres suivants, et pour un nombre quelconque de variables, supposées dépendantes d'autres quelconques. Si parmi ces variables, les unes étaient dépendantes et les autres indépendantes, il suffirait de supposer nulles les différentielles de ces dernières qui passeraient le premier ordre.

Cas particulier où x et y sont des fonctions linéaires. — Si x et y étaient des fonctions linéaires des variables indépendantes, dx et dy seraient constants, quelles que fussent les valeurs des variables; on aurait donc

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad d^3x = 0, \ldots,$$

et, par conséquent, on retrouverait la formule symbolique

$$d^m u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^m,$$

qui s'étendrait à un nombre quelconque de variables.

Différentielles des divers ordres des fonctions implicites.

201. Supposons d'abord la fonction implicite u dépen-

dante des variables x et y, et déterminée par une équation unique

$$F(x, y, u) = 0;$$

nous aurons d'abord

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$

d'où l'on tirerait du, comme nous l'avons déjà vu.

Différentiant encore cette équation par rapport à toutes les variables, et observant que du n'est pas constant, il vient

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu + 2\frac{d^2F}{dydu}dydu + \frac{dF}{du}d^2u = 0;$$

d'où l'on tirerait d^2u, et ainsi de suite. On agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables indépendantes. Si u ne dépendait que d'une variable x, cette équation se réduirait à

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + \frac{dF}{du}d^2u = 0.$$

202. Si l'on avait deux équations, il y aurait deux variables, fonctions de toutes les autres; et, dans ce cas, on différentierait successivement chacune des équations, en distinguant bien les variables dépendantes des indépendantes : on déterminerait ainsi les différentielles secondes, troisièmes, etc., des deux fonctions; et l'on agirait de la même manière dans le cas d'un nombre quelconque d'équations.

Soient, par exemple, les deux équations

$$F(x, y, u) = 0,$$
$$f(x, y, u) = 0;$$

y et u sont des fonctions de la variable indépendante x.

On aura d'abord les deux équations

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{du}du = 0,$$
$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{du}du = 0;$$

d'où l'on tirera dy et du. En différentiant ces deux équations, on obtiendra

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2F}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2F}{dxdu}dxdu$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dydu}dydu + \frac{dF}{dy}d^2y + \frac{dF}{du}d^2u = 0,$$

$$\frac{d^2f}{d^2x}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2f}{dxdu}dxdu$$
$$+ 2\frac{d^2f}{dydu}dydu + \frac{df}{dy}d^2y + \frac{df}{du}d^2u = 0,$$

d'où l'on tirerait d^2u et d^2y, puisque dy et du sont connus. On obtiendrait ainsi les différentielles de tous les ordres de y et u.

CHAPITRE IV.

CHANGEMENT DE VARIABLES.

203. *Cas d'une seule variable indépendante.* — Nous considérerons d'abord les fonctions d'une seule variable indépendante; et l'objet que nous allons nous proposer est d'exprimer toutes les dérivées d'une fonction y par rapport à une variable x dont elle dépend, au moyen des dérivées successives d'une autre fonction u par rapport à une variable t, regardée comme indépendante.

Toutes les quantités dépendent d'une seule variable : ainsi l'on a trois équations entre x, y, u, t; ou deux seulement, en laissant de côté celle qui exprimera la relation entre x et y. On voit qu'en vertu de ces trois équations, on peut considérer u comme une fonction de t, et ce sont les dérivées de u par rapport à t que l'on veut faire entrer dans des calculs où se trouvent les dérivées de y par rapport à x.

Pour cela nous allons d'abord exprimer les dérivées de y par rapport à x, en fonction des dérivées de x et y par rapport à la même variable indépendante t dont elles seraient regardées comme fonctions. Ces formules seront les mêmes, quelle que soit la forme particulière, tant de l'équation entre x et y, que de celle qui doit lier x et y avec t. Nous montrerons ensuite comment les dérivées de x et y par rapport à t peuvent s'exprimer au moyen de celles que l'on veut introduire, qui sont celles de u par rapport à t. Ce dernier calcul dépend des équations qui lient x et y avec t et u, et peut-être encore avec

d'autres variables; et le nombre des équations doit toujours être tel, qu'il n'y ait qu'une seule variable indépendante, comme nous l'avons supposé.

204. Pour exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de celles de x et y par rapport à t, nous observerons que, d'après le principe des fonctions de fonctions, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{ou, puisque} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Passons maintenant à l'expression de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Nous différentierons pour cela les deux membres de cette équation par rapport à x; mais, afin de n'introduire dans le second membre que des dérivées par rapport à t, nous le différentierons d'abord par rapport à t, puis nous multiplierons par $\frac{dt}{dx}$, ou nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Nous obtiendrons ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

De même, pour obtenir $\frac{d^3y}{dx^3}$, nous différentierons le second membre par rapport à t, puis nous diviserons par $\frac{dx}{dt}$. Et en continuant ainsi, il est clair que l'on aura l'expression de toutes les dérivées de y par rapport à x, au

moyen de celles de x et y par rapport à une variable quelconque t, dont x et y seraient dépendants.

On peut, au lieu des dérivées de x et y par rapport à t, introduire leurs différentielles; il suffira de supprimer le diviseur dt, et il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}.$$

Ces premières formules se rapportent au *changement de la variable indépendante* seulement.

Si l'on suppose que la variable t soit la fonction y elle-même, on aura les dérivées de y par rapport à x, exprimées au moyen de celles de x par rapport à y, quelle que soit d'ailleurs la relation entre x et y. Ces formules seront

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \ldots.$$

205. Considérons maintenant le cas général où l'on aurait entre m variables $x, y, \ldots, u, t$, les $m-2$ équations

$$\begin{aligned} f(x, y, \ldots, u, t) &= 0, \\ f'(x, y, \ldots, u, t) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

sans compter l'équation qui donne y en fonction de x. Si l'on différentie ces $m-2$ équations par rapport à t, on pourra exprimer $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ en fonction de $\frac{du}{dt}$, par la résolution d'équations du premier degré.

Différentiant de nouveau ces équations, on introduira les dérivées secondes par rapport à t, et il y restera des dérivées premières que l'on pourra remplacer par leurs valeurs tirées des premières équations. On pourra donc

encore, par la résolution d'équations du premier degré, tirer les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ au moyen de $\frac{d^2u}{dt^2}$ et $\frac{du}{dt}$.

En continuant ainsi, toutes les dérivées de x et de y par rapport à t seront exprimées au moyen de celles de u par rapport à t; et comme nous avons donné les formules générales qui expriment $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., il s'ensuit que l'on connaîtra $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... au moyen de $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ..., ce qui était l'objet de la question.

Si, au lieu d'équations finies, on avait des équations différentielles, il faudrait toujours chercher à en déduire $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., au moyen de $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, etc., et l'on agirait ensuite comme dans le cas précédent.

Supposons, par exemple, l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1,$$

et proposons-nous d'exprimer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc. La question se réduit ici à exprimer $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., au moyen de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc.

Or on aura d'abord

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{dt^2}}.$$

Pour avoir $\frac{d^2y}{dt^2}$, on différentiera l'équation donnée, et il

viendra

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}=0,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}}=-\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{dx^2}{dt^2}}}.$$

Une nouvelle différentiation ferait connaître $\frac{d^3y}{dt^3}$, et ainsi de suite.

Ce cas est celui où l'on déterminera une courbe par une équation entre l'arc et l'abscisse.

206. *Cas de plusieurs variables indépendantes.* — Considérons maintenant une fonction z de deux variables indépendantes x, y. Sa forme n'est pas connue, et l'on ne doit pas avoir besoin d'en faire usage; mais on doit toujours raisonner dans l'hypothèse qu'elle existe.

La question que nous nous proposons est de déterminer les dérivées partielles de tous les ordres, de z par rapport à x et y, au moyen de celles d'une autre fonction r par rapport à deux autres variables indépendantes φ et θ, en supposant qu'il existe trois équations entre $x, y, z, r, \varphi, \theta$, savoir

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} F(x,y,z,\theta,\varphi,r)=0,\quad F_1(x,y,z,\theta,\varphi,r)=0,\\ \qquad\qquad F_2(x,y,z,\theta,\varphi,r)=0,\end{array}\right.$$

de sorte que quatre quelconques de ces six variables peuvent être regardées comme fonctions des deux autres qui seront entièrement arbitraires.

Cela posé, différentions successivement r par rapport à chacune des variables x et y, la seconde étant supposée constante; et considérons r comme dépendant de θ et φ,

qui eux-mêmes dépendent de x et y. Nous aurons ainsi

$$(2)\qquad \frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}.$$

Il faut maintenant éliminer de ces équations les dérivées $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{dr}{dy}$, et pour cela nous différentierons d'abord les équations (1) par rapport à x; d'où

$$\frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_1}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_1}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{dF_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dF_2}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

d'où nous tirerons $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{dr}{dx}$, en fonction de $\frac{dz}{dx}$: et les reportant dans la première équation (2) nous en tirerons immédiatement $\frac{dz}{dx}$ en fonction de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$.

Différentiant de même les équations (1) par rapport à y et faisant usage de la seconde équation (2), on obtiendra $\frac{dz}{dy}$ au moyen de $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$; ce qui était l'objet que l'on s'était proposé.

On conclurait facilement de là $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ au moyen de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, par la résolution de deux équations du premier degré; mais on pourrait d'ailleurs les obtenir directement en suivant une marche inverse.

On passera aux dérivées partielles du second ordre en différentiant $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ par rapport à x et y : on sera ramené

à différentier $\frac{dr}{d\theta}$, $\frac{dr}{d\varphi}$ par rapport à x et y, et on les traitera comme on a traité r, ce qui introduira les dérivées du second ordre de r par rapport à θ et φ.

On aura en outre à différentier $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, ce qui introduira les dérivées partielles du second ordre de z par rapport à x et y, dont on aura ainsi les valeurs.

Il est facile de voir que cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables indépendantes, et s'étend aux dérivées de toutes les autres.

207. Nous examinerons, en particulier, le cas d'une fonction u de trois variables indépendantes x, y, z, qui doivent être remplacées par trois autres variables indépendantes r, φ, θ, liées à x, y, z par trois équations connues; dans ce cas, il s'agira d'exprimer toujours les dérivées partielles de u par rapport à x, y, z, au moyen de ses dérivées partielles par rapport à r, φ, θ. Ce problème renferme celui de la transformation des coordonnées dans des équations aux différentielles partielles où la variable principale est une fonction de trois coordonnées.

Considérons u comme fonction de θ, φ, r, et ces dernières comme fonction de x, y, z; et différentions u partiellement par rapport à x, y, z, nous aurons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx}, \\ \frac{du}{dy} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy}, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}. \end{aligned}\right.$$

Or, au moyen des trois équations entre x, y, z, θ, φ, r,

on peut déterminer les dérivées partielles

$$\frac{d\theta}{dx},\ \frac{d\theta}{dy},\ \frac{d\theta}{dz},\ \frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz},\ \frac{dr}{dx},\ \frac{dr}{dy},\ \frac{dr}{dz},$$

et, par conséquent, les équations (3) donnent les valeurs des dérivées partielles de la fonction u par rapport à x, y, z, au moyen de celles de la même fonction par rapport à θ, φ, r.

La résolution de ces trois équations ferait connaître $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ au moyen de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$; mais on pourrait les trouver directement par une marche inverse de la précédente.

En différentiant les équations (3) successivement par rapport à x, y, z, on exprimerait les dérivées du second ordre par rapport aux variables indépendantes d'un des systèmes, au moyen des dérivées du second ordre par rapport aux variables de l'autre; et l'on continuerait ainsi indéfiniment.

Ainsi, par exemple, en différentiant $\frac{du}{dx}$ par rapport à x, on serait ramené à former les dérivées partielles de $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$ par rapport à x, et c'est ce que l'on ferait en traitant $\frac{du}{d\theta}, \frac{du}{d\varphi}, \frac{du}{dr}$, comme on avait d'abord traité u, ce qui introduirait les dérivées du second ordre de u par rapport à θ, φ, r, tout le reste étant connu.

208. Appliquons ce procédé à une transformation qui se présente souvent dans les questions de mécanique et de physique mathématique.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point, et r, θ, ψ ses coordonnées polaires, de sorte qu'on ait

entre ces six variables les trois équations

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi,$$

on trouvera, au moyen de la méthode que nous venons d'exposer,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi + \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\theta - \frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dy} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta} \\ & + 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\left(\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r}\right) \\ & + \frac{d^2u}{d\psi\,d\theta}\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r} \\ & - \frac{du}{d\theta}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right) + \frac{du}{d\psi}\left(\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2} \\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta} + \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi}{r^2} \\ & + \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dy\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2} \\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\cos\psi}{r^2} \\ & + \frac{du}{d\theta}\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sin\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r} - 2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$- 2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\tang\theta} + \frac{du}{dr}\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{r}$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) + 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi}{r^2} + \frac{d^2u}{d\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\frac{d^2u}{d\psi\,dr}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r}$$

$$+ 2\frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\tang\theta} + \frac{du}{dr}\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r}\right)$$

$$+ \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) - 2\frac{du}{d\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\cos^2\theta + \frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2\frac{d^2u}{d\theta\,dr}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{du}{dr}\frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$+ 2\frac{du}{d\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE V.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

209. *Détermination des valeurs particulières des fonctions qui se présentent sous les formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. — Lorsqu'une fonction est le quotient de deux autres fonctions de x, et qu'une valeur particulière de x rend ces deux dernières nulles ou infinies, la valeur de la première se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et, dans ce cas, on peut se proposer de déterminer la valeur vers laquelle converge la fraction donnée, lorsque x tend vers cette valeur particulière; c'est cette valeur limite que l'on désigne souvent sous le nom de *vraie valeur* de la fraction qui se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Cherchons d'abord la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$ lorsque x tend vers une valeur x_0 telle que l'on ait

$$F(x_0) = 0, \quad f(x_0) = 0.$$

Soit h une quantité tendant vers zéro, on aura, d'après le n° 45,

$$\frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)};$$

donc

$$\lim. \frac{F(x)}{f(x)} = \lim. \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

lorsque x tend vers x_0; et, par conséquent, si $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont pas nuls ni infinis, la limite cherchée sera $\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}$.

Si l'on avait encore

$$F'(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0,$$

la limite de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ serait la même que celle de $\frac{F''(x)}{f''(x)}$, et ainsi de suite.

Si donc toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n exclusivement deviennent nulles pour $x = x_0$, la limite cherchée sera celle de $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$; et si $F^n(x_0)$ et $f^n(x_0)$ ne sont ni nulles ni infinies, on aura, pour valeur de cette limite,

$$\frac{F^n(x_0)}{f^n(x_0)}.$$

Si l'une de ces dernières dérivées est encore nulle, la limite sera 0 si c'est $F^n(x_0)$ qui est nulle, et la fonction croîtra sans limite si c'est $f^n(x_0)$.

210. Supposons maintenant

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = \infty,$$

d'où

$$\frac{1}{F(x_0)} = 0, \quad \frac{1}{f(x_0)} = 0;$$

on aura identiquement

$$\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)} = \frac{\frac{1}{f(x_0+h)}}{\frac{1}{F(x_0+h)}} = \frac{\frac{f'(x_0+\theta h)}{f(x_0+\theta h)^2}}{\frac{F'(x_0+\theta h)}{F(x_0+\theta h)^2}}.$$

d'où, en représentant $\frac{F(x_0+h)}{f(x_0+h)}$ par $\varphi(h)$,

$$\frac{F'(x_0+\theta h)}{f'(x_0+\theta h)}=\frac{\varphi(\theta h)^2}{\varphi(h)}=\varphi(\theta h)\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}.$$

Or, si $\frac{F(x)}{f(x)}$, ou $\varphi(h)$, a une limite finie, $\varphi(\theta h)$ aura la même limite, et $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ tendra vers l'unité; on aura donc

$$\lim.\frac{F(x)}{f(x)}=\lim.\frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Si, au contraire, l'expression $\frac{F(x)}{f(x)}$ tend vers o ou ∞, elle finira, en général, par varier constamment dans le même sens, à mesure que x tendra vers x_0; et le facteur $\frac{\varphi(\theta h)}{\varphi(h)}$ sera, dans le premier cas, plus petit, et, dans le second, plus grand que l'unité. Donc $\frac{F'(x)}{f'(x)}$ devient nul ou infini en même temps que $\frac{F(x)}{f(x)}$, et par conséquent, dans tous les cas, la recherche de la vraie valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ se ramène à celle de $\frac{F'(x)}{f'(x)}$.

Si donc $F'(x_0)$ et $f'(x_0)$ ne sont ni nuls ni infinis, la limite cherchée sera

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Si les dérivées de $F(x)$, $f(x)$ devenaient infinies jusqu'à un certain ordre, on agirait comme dans le cas précédent. Mais si elles deviennent toutes infinies, cette méthode ne sera plus applicable; et ce qu'il y a souvent de

mieux à faire dans ce cas, c'est de remplacer x par x_0+h et d'effectuer les réductions.

Ainsi soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\sqrt[3]{x-x_0}}{\sqrt[4]{x^2-x_0^2}};$$

ses deux termes deviennent nuls pour $x=x_0$, et toutes les dérivées deviennent infinies. Mais si l'on pose $x=x_0+h$, elle devient

$$\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h(2x_0+h)}}, \quad \text{ou} \quad \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h^{\frac{1}{4}}(2x_0+h)^{\frac{1}{4}}};$$

supprimant le facteur commun $h^{\frac{1}{4}}$, il reste $\dfrac{h^{\frac{1}{12}}}{(2x_0+h)^{\frac{1}{4}}}$, dont la limite est zéro quand h tend vers zéro.

211. La valeur x_0 étant arbitraire peut être supposée aussi grande que l'on voudra, et, par conséquent, les règles précédentes s'appliquent au cas où l'on a $x_0=\infty$. Mais la démonstration directe ne pourrait plus se faire de la même manière dans ce cas, et il est bon de l'examiner à part.

Si l'on pose $x=\frac{1}{y}$, on aura

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)};$$

y tendant vers zéro, il n'y aura aucune difficulté, et l'on aura, par la démonstration précédente,

$$\lim.\frac{F\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim.\frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}=\lim.\frac{F'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

On aura donc aussi

$$\lim. \frac{F(x)}{f(x)} = \lim. \frac{F'(x)}{f'(x)},$$

x croissant indéfiniment.

212. Considérons maintenant le produit

$$F(x) f(x),$$

et supposons

$$F(x_0) = \infty, \quad f(x_0) = 0;$$

nous aurons identiquement

$$F(x) f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}.$$

ce qui ramène au premier cas; et l'on trouve alors

$$\lim. F(x) f(x) = -\lim. \frac{F(x)^2 f'(x)}{F'(x)}.$$

Si la seconde expression rentre dans un des cas examinés, on la traitera par les procédés déjà indiqués.

213. On peut encore donner une autre règle pour trouver la limite de la fraction

$$\frac{F(x)}{x},$$

dans laquelle on suppose x infini.

En effet, h étant une quantité finie quelconque, on a, quel que soit x,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x + \theta h);$$

faisant croître x indéfiniment, le second membre tend vers $F'(\infty)$, qui est la limite de la fraction $\frac{F(x)}{x}$, d'après

une des règles précédentes. Donc

$$\lim. \frac{F(x)}{x} = \lim. \frac{F(x+h) - F(x)}{h};$$

et si, pour plus de simplicité, on fait $h = 1$,

$$\lim. \frac{F(x)}{x} = \lim. [F(x+1) - F(x)].$$

Ce théorème a été démontré d'une autre manière par M. Cauchy, dans son *Cours d'Analyse algébrique*.

214. Considérons maintenant une expression de la forme

$$F(x)^{f(x)};$$

son logarithme est

$$f(x) \log F(x),$$

et rentre dans une expression que nous avons examinée. Si donc on peut déterminer par les règles précédentes la vraie valeur de ce logarithme, dans le cas singulier où les fonctions $\log F(x)$ et $f(x)$ seraient l'une infinie et l'autre nulle, on en conclura immédiatement celle de l'expression proposée.

Examinons en particulier l'expression

$$F(x)^{\frac{1}{x}},$$

dans le cas de $x = \infty$, et supposant $F(\infty) = \infty$. Le logarithme de cette expression est

$$\frac{\log F(x)}{x},$$

et sa limite est celle de $\frac{F'(x)}{F(x)}$, que l'on peut traiter par les règles précédentes.

Mais si l'on applique à $\frac{\log F(x)}{x}$ la règle particulière du n° 212, on trouvera que sa limite est la même que

celle de

$$\log F(x+1) - \log F(x), \quad \text{ou} \quad \log \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Donc la limite de $F(x)^{\frac{1}{x}}$ est la même que celle de $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ quand x devient infini. Cette règle avait encore été démontrée par M. Cauchy.

Si l'on a $F(\infty) = 0$, on posera

$$F(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \quad \text{d'où} \quad F(x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\varphi(x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Mais $\varphi(\infty) = \infty$, donc

$$\lim. \varphi(x)^{\frac{1}{x}} = \lim. \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$$

et

$$\lim. F(x)^{\frac{1}{x}} = \lim. \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \lim. \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

215. L'application de ces diverses règles conduit à quelques résultats particuliers qui méritent d'être remarqués :

$$\frac{a^x}{x} = \infty \text{ pour } x = \infty \text{ si l'on a } a > 1.$$

$$\frac{\log x}{x} = 0 \text{ pour } x = \infty,$$

$$x \log x = 0 \text{ pour } x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \infty \text{ pour } x = 0,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pour } x = \infty,$$

$$(A x^m + B x^{m-1} + \ldots + U)^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pour } x = \infty,$$

$$x^x = 1 \text{ pour } x = 0,$$

$$(\cos mx)^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ pour } x = 0,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ pour } x = 0.$$

Série de Taylor pour les fonctions d'une seule variable.

216. La série que nous allons faire connaître a pour objet de développer une fonction quelconque de la somme $x+h$ suivant les puissances entières et positives de l'une des parties, par exemple de h; elle a été découverte par Taylor, et a conservé le nom de son inventeur. Maclaurin en a déduit une autre qui donne le développement d'une fonction suivant les puissances de la variable, et qui a été employée avant lui par Stirling. Il suffit, en effet, de faire $x=0$ dans la première pour obtenir le développement d'une fonction de la variable h suivant les puissances de h. Cette série de Maclaurin n'est donc qu'un cas particulier de celle de Taylor, et c'est pour cela qu'on la désigne ordinairement sous le même nom.

Soit $F(x+h)$ la fonction qu'il s'agit de développer suivant les puissances entières et positives de h.

Commençons par écrire un nombre quelconque n des termes déduits suivant la même loi que si la fonction était entière et rationnelle, et désignons par $f(h)$ la fonction de x et de h, qui, ajoutée à ces termes, reproduit $F(x+h)$: nous aurons

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+f(h).$$

Les dérivées des deux membres par rapport à h étant nécessairement identiques, on reconnaît sans peine que $f(h)$ et ses $(n-1)$ premières dérivées deviennent nulles pour $h=0$, et que

$$f^{(n)}(h)=F^{(n)}(x+h).$$

Donc, d'après une formule démontrée précédemment, on

aura

$$f(h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x + \theta h),$$

et, par suite,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x + \theta h) \end{array} \right.$$

Cette formule donne la solution de la question, et montre dans quel cas elle est possible. En effet, si l'expression

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x + \theta h)$$

tend vers zéro à mesure que n augmente, $F(x+h)$ est la limite de la série

$$F(x) + hF'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \ldots,$$

et l'on peut poser la formule suivante, qui est celle de Taylor :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x) + \ldots, \end{array} \right.$$

Mais il faut bien faire attention que, d'après la formule sur laquelle est fondée cette série, elle ne peut être substituée à $F(x+h)$ que lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues entre x et $x+h$, et que $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

La fonction $F(x+h)$ ne peut être développée suivant les puissances de h autrement que par la formule (2); car deux séries convergentes ordonnées suivant les puissances

entières et positives d'une même variable, et dont les sommes sont égales, quelle que soit la valeur de cette variable, sont les mêmes, terme pour terme.

217. Il est facile de reconnaître que le terme

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h),$$

qui donne la valeur exacte du reste de la série, après les n premiers termes, tend vers zéro toutes les fois que $F^n(x)$ reste fini, lorsque n augmente indéfiniment : et pour cela il suffit de faire voir que $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ tend vers zéro quel que soit h. En effet, quand n aura dépassé la valeur de h, et qu'on l'augmentera indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ sera multipliée par les fractions $\frac{h}{n+1}$, $\frac{h}{n+2}, \ldots$, qui diminuent de plus en plus. Mais quand même elles resteraient égales à la première, qui est plus petite que l'unité, on sait que le produit aurait pour limite zéro. Donc il en est de même de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ quand n croîtra indéfiniment; et la série de Taylor peut être employée lorsque $F(x)$ et toutes ses dérivées sont continues et finies entre x et $x+h$.

Limites de l'erreur. — La formule (1) a l'avantage de donner des limites de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de la série de Taylor. En effet, si l'on prend les n premiers termes, la quantité exacte qu'il faudrait y ajouter pour obtenir $F(x+h)$ est $\frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$. Si donc on désigne par A et B la plus petite et la plus grande valeur que prend $F^n(x)$ quand x passe par toutes les valeurs, de x à $x+h$, l'er-

reur commise en prenant les n premiers termes de la série sera plus grande que $\frac{A h^n}{1.2\ldots n}$, et plus petite que $\frac{B h^n}{1.2\ldots n}$.

218. La formule

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^n(x+\theta h)$$

n'exige aucune condition relative aux dérivées d'un ordre supérieur au $n^{ième}$. Ces dernières pourraient être discontinues dans l'intervalle de x à $x+h$, sans que la formule cessât d'être exacte. Ainsi ce développement peut être exact quand on l'arrête à un certain terme, et devenir inexact si l'on voulait le pousser au delà.

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$F(x) = f(x) + (x-x_0)^{m+\frac{p}{q}} \varphi(x),$$

m étant un nombre entier positif, et $\frac{p}{q}$ compris entre 0 et 1. Si l'on considère pour x la valeur particulière x_0, les dérivées seront finies jusqu'à $F^m(x_0)$ inclusivement, en supposant que celles de $f(x)$ et $\varphi(x)$ le soient; mais au delà elles deviendront infinies. Le développement ne devra donc être poussé que jusqu'au terme $\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m-1} F^{m-1}(x_0)$ tout au plus; et il pourra être complété au moyen d'un terme renfermant la dérivée suivante.

219. *Développement de* $F(x)$. — Si, dans la formule (1), on fait $x=0$, et qu'on remplace ensuite la

lettre h par la lettre x, on obtient

$$(3)\quad \begin{cases} F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(0) + \frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x). \end{cases}$$

On peut ainsi développer une fonction de x suivant les puissances de x, pourvu que cette fonction et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues entre 0 et x. Si, à mesure que n augmente indéfiniment, l'expression $\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x)$ tend vers zéro, la fonction $F(x)$ pourra être exprimée par la formule

$$(4)\qquad F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots;$$

c'est-à-dire que la limite de la somme des termes du second membre est $F(x)$. Cette dernière formule est celle de Maclaurin.

Si on l'avait obtenue avant celle de Taylor, on en déduirait celle-ci en considérant $F(x+h)$ comme une fonction de h et la développant par la formule de Maclaurin.

Formule plus générale. — On peut encore développer $F(x)$ d'après la formule de Taylor, en remplaçant x par $x_0 + (x - x_0)$; on trouve ainsi

$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}F''(x_0) + \ldots,$$

et l'on peut toujours choisir x_0 de telle sorte que $F(x_0)$, $F'(x_0)$, etc., ne soient pas infinies. Mais cela ne suffira pas, et il faudra toujours s'assurer que le reste de la série, dont nous connaissons l'expression, a pour limite 0.

Autre formule. — Enfin la série de Taylor a conduit

Bernoulli à une autre forme de développement peu employée. Si l'on y suppose $h = -x$, elle devient

$$F(o) = F(x) - xF'(x) + \frac{x^2}{1.2}F''(x) - \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots,$$

d'où

$$(5)\ F(x) = F(o) + xF'(x) - \frac{x^2}{1.2}F''(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x) - \ldots,$$

Les coefficients des différentes puissances de x sont eux-mêmes des fonctions de x; de sorte que l'on ne trouve pas dans ce développement le principal avantage que l'on cherche, qui est de remplacer la fonction par un polynôme entier et rationnel. On s'assurerait de son exactitude, comme dans les formules précédentes

220. Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor et de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes; car elles pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles devraient représenter.

Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = o$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle. Il suit de là que si $F(x)$ est une fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera, par conséquent, inexacte.

L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre quelconque de termes.

221. *Autre forme pour le reste.* — Il est quelquefois

utile de donner au reste de la série de Taylor une autre forme que nous allons faire connaître.

Considérons d'abord le développement de $F(x)$; nous pouvons poser, en remplaçant x par $z + (x - z)$,

$$F(x) = F(z) + (x - z)F'(z) + \frac{(x-z)^2}{1.2}F''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x-z)].$$

Si l'on représente le dernier terme par $f(z)$, et qu'on différentie les deux membres de l'équation par rapport à z, on obtient, toute réduction faite,

$$0 = \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z) + f'(z).$$

Cette équation détermine la dérivée $f'(z)$ de la fonction

$$f(z), \quad \text{ou} \quad \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x-z)],$$

et donne

$$f'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z).$$

Or on peut exprimer $f(z)$ au moyen de $f'(z)$ par la formule

$$f(z) = f(x) + (z - x)f'[x + \theta_1(z - x)],$$

et l'on peut observer que $f(x) = 0$, puisqu'en faisant $z = x$ dans la fonction représentée par $f(z)$, on trouve identiquement zéro. La dernière équation donne donc

$$f(z) = \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots(n-1)}(\theta_1)^{n-1}F^n[x + \theta_1(z - x)],$$

et l'on a ainsi une nouvelle expression du reste de la série qui donne le développement de $F(x)$.

Si l'on suppose $z = 0$, on a le développement de Ma-

Digitized by Google

Bernoulli à une autre forme de développement peu employée. Si l'on y suppose $h = -x$, elle devient

$$F(0) = F(x) - xF'(x) + \frac{x^2}{1.2}F''(x) - \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots,$$

d'où

$$(5)\ F(x) = F(0) + xF'(x) - \frac{x^2}{1.2}F''(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(x) - \ldots,$$

Les coefficients des différentes puissances de x sont eux-mêmes des fonctions de x; de sorte que l'on ne trouve pas dans ce développement le principal avantage que l'on cherche, qui est de remplacer la fonction par un polynôme entier et rationnel. On s'assurerait de son exactitude, comme dans les formules précédentes.

220. Il faut bien se garder de croire que les séries de Taylor et de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes; car elles pourraient converger vers d'autres limites que les fonctions qu'elles devraient représenter.

Ainsi, par exemple, la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ devient nulle, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = 0$, et cependant elle n'est pas identiquement nulle. Il suit de là que si $F(x)$ est une fonction développable par la série de Maclaurin, $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$, développée par la même formule, donnera lieu à une série convergente, mais qui représentera $F(x)$, et sera, par conséquent, inexacte.

L'exactitude du développement ne peut jamais être établie que par la considération de l'expression qui en complète la valeur après un nombre quelconque de termes.

221. *Autre forme pour le reste.* — Il est quelquefois

utile de donner au reste de la série de Taylor une autre forme que nous allons faire connaître.

Considérons d'abord le développement de $F(x)$; nous pouvons poser, en remplaçant x par $z + (x - z)$,

$$F(x) = F(z) + (x - z)F'(z) + \frac{(x-z)^2}{1.2}F''(z) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(z) + \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x-z)].$$

Si l'on représente le dernier terme par $f(z)$, et qu'on différentie les deux membres de l'équation par rapport à z, on obtient, toute réduction faite,

$$0 = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z) + f'(z).$$

Cette équation détermine la dérivée $f'(z)$ de la fonction

$$f(z), \quad \text{ou} \quad \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z + \theta(x-z)],$$

et donne

$$f'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z).$$

Or on peut exprimer $f(z)$ au moyen de $f'(z)$ par la formule

$$f(z) = f(x) + (z - x)f'[x + \theta_1(z - x)],$$

et l'on peut observer que $f(x) = 0$, puisqu'en faisant $z = x$ dans la fonction représentée par $f(z)$, on trouve identiquement zéro. La dernière équation donne donc

$$f(z) = \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots(n-1)}(\theta_1)^{n-1}F^n[x + \theta_1(z - x)],$$

et l'on a ainsi une nouvelle expression du reste de la série qui donne le développement de $F(x)$.

Si l'on suppose $z = 0$, on a le développement de Ma-

claurin, sous la forme suivante, en faisant $1 - \theta_1 = \theta$:

$$(6)\quad \begin{cases} F(x) = F(0) + xF'(0) + \dfrac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \\ + \dfrac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(0) + \dfrac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(\theta x), \end{cases}$$

θ étant compris entre 0 et 1.

Dans le développement semblable donné précédemment, le reste est exprimé par

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}F^n(\theta x),$$

θ désignant une fraction différente. La nouvelle forme donnée à ce reste est quelquefois plus propre à manifester la convergence de la série vers $F(x)$.

Si dans la formule (6) on suppose $F(x) = f(h + x)$, on aura

$$f(h+x) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1.2}f''(h) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(h) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(h+\theta x);$$

ou, en changeant les lettres h et x l'une dans l'autre,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^n(x+\theta h),$$

c'est la série de Taylor, le reste étant présenté sous une nouvelle forme.

Appliquons les formules précédentes à quelques exemples.

222. Applications. — 1°. Soit $F(x) = a^x$, on aura

$$F'(x) = a^x \mathrm{l}\, a, \quad \ldots, \quad F^n(x) = a^x \mathrm{l}^n a,$$
$$F(0) = 1, \quad F'(0) = \mathrm{l}\, a, \quad \ldots, \quad F^n(0) = \mathrm{l}^n a,$$

et, par suite,

$$a^x = 1 + x \mathrm{l}\, a + \frac{x^2 \mathrm{l}^2 a}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-2} \mathrm{l}^{n-1} a}{1.2\ldots n-1} + \frac{x^n \mathrm{l}^n a}{1.2\ldots n} a^{\theta x},$$

Le reste $\frac{x^n \mathrm{l}^n a}{1.2\ldots n} a^{\theta x}$ tendant vers zéro, à mesure que n augmente, la série indéfinie a pour somme a^x.

2°. Soient

$$F(x) = \mathrm{l}(1+x), \quad F'(x) = (1+x)^{-1},$$
$$F''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$

d'où résulte

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = -1, \ldots, \quad F^n(0) = \pm 1.2\ldots(n-1),$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}.$$

La série serait composée de termes indéfiniment croissants si l'on supposait $x > 1$, parce que la limite du rapport d'un terme au précédent est x, lorsque leurs exposants augmentent indéfiniment (*voir* à la fin la Note sur les séries). Il suffit donc de s'assurer si le reste tend vers zéro quand on a $x < 1$; et pour cela il faut distinguer deux cas. Si x est positif, on a $\frac{x}{1+\theta x} < 1$ si $x < 1$; et par conséquent le reste tend vers zéro, et la série converge vers $\mathrm{l}(1+x)$.

Si x est négatif et qu'on le représente par $-z$, le reste $\frac{z^n}{n(1-\theta z)^n}$ ne se présente pas sous une forme propre à

faire reconnaître s'il tend vers zéro, parce que l'on n'aperçoit pas lequel est le plus grand des deux termes de la fraction $\frac{z}{1-\theta z}$. Mais si l'on prend la seconde forme que nous avons indiquée pour le reste, on trouvera pour le cas actuel $\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}$, ou, abstraction faite du signe,

$$\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}\cdot\frac{z}{1-\theta z}.$$

Or la fraction $\frac{z-\theta z}{1-\theta z}$ est moindre que l'unité si $z<1$; donc le reste tend vers zéro, et la série représente $l(1+x)$. Cette série peut donc être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

On peut obtenir des séries plus convergentes que la précédente et plus applicables au calcul des logarithmes.

Si dans la formule

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ldots,$$

on change x en $-x$, on obtient

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3},\ldots,$$

et, en retranchant la seconde de la première,

$$l\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

Posant

$$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{1}{y},\quad \text{d'où}\quad x=\frac{1}{2y+1},$$

il vient

$$l\left(\frac{y+1}{y}\right) = l(y+1) - ly$$
$$= 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \ldots\right].$$

Cette série très-convergente donne la différence des logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, et fait connaître, par conséquent, les logarithmes de tous les nombres entiers depuis l'unité.

Connaissant les logarithmes dans la base e, on les obtiendrait dans toute autre base, en les divisant par le logarithme de la nouvelle base pris dans la base e.

Nous ferons connaître plus tard des procédés plus commodes pour la construction des Tables de logarithmes.

3°. Soit maintenant

$$F(x) = (1+x)^m,$$

on aura

$$F'(x) = m(1+x)^{m-1}, \ldots$$
$$F^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

et, par suite,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Pour que la série indéfinie représente $(1+x)^m$, il est d'abord nécessaire qu'elle soit convergente. Or le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}x$, et tend vers $-x$ à mesure que p augmente; donc la série n'est pas convergente si x est en dehors des limites $+1$ et -1. Il suffit donc de reconnaître si le reste tend vers zéro pour toutes les valeurs de x comprises entre ces limites.

Ce reste peut se décomposer dans les deux facteurs

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n \quad \text{et} \quad (1+\theta x)^{m-n}.$$

Le premier tend vers zéro, parce que si n augmente d'une unité, il se trouve multiplié par $\frac{m-n}{n+1}x$ qui s'approche de plus en plus de $-x$ dont la valeur absolue est moindre que l'unité; et quant au second facteur $\frac{(1+\theta x)^m}{(1+\theta x)^n}$, si l'on suppose d'abord x positif, il tend aussi vers zéro, à moins que θ ne s'approche indéfiniment de zéro, mais dans tous les cas ce facteur reste plus petit que l'unité, et, par conséquent, le reste de la série tend vers zéro. Donc elle représente $(1+x)^m$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

Mais si x est négatif, rien ne prouve que le second facteur ne croîtra pas indéfiniment avec n, et cela arrivera même certainement, à moins que θ ne tende vers zéro; car l'expression $(1+\theta x)^n$ tendrait vers zéro si la fraction $1+\theta x$ ne s'approchait pas indéfiniment de l'unité. Il faut alors avoir recours à la seconde forme du reste, qui est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Le facteur $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{1.2\ldots n-1}$ tend encore vers zéro; l'autre facteur devient, en remplaçant x par $-z$,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Or on a $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$, puisque $z<1$: donc $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ tendra vers zéro, à moins que θ ne tende vers zéro; et

dans ce cas même cette expression est toujours moindre que l'unité. Donc le reste de la série tend vers zéro, et, par conséquent, celle-ci peut être employée pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1.

4°. En prenant successivement

$$F(x) = \sin x, \quad F(x) = \cos x,$$

on est conduit aux séries suivantes qui sont exactes, quel que soit x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Elles supposent le rayon égal à l'unité, c'est-à-dire que x désigne le rapport de l'arc au rayon du cercle; et $\sin x$, $\cos x$ désignent les rapports des lignes auxquelles elles correspondent, à ce même rayon : dans le cas où il serait désigné par R, on remplacerait dans les seconds membres x par $\frac{x}{R}$, R étant le rayon; et dans les premiers $\sin x$ et $\cos x$ par $\frac{\sin x}{R}$, $\frac{\cos x}{R}$. Quelque grand que soit x, les termes finissent par aller constamment en diminuant, et comme ils sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en arrêtant la série à un terme quelconque est moindre que le suivant.

5°. Considérons maintenant des fonctions de $x + h$, et soit d'abord $F(x) = x^m$; on trouvera, quel que soit m,

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots m-n+2}{1.2\ldots(n-1)}x^{m-n+1}h^{n-1}$$
$$+ \frac{m\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}h^n(x+\theta h)^{m-n}.$$

Le rapport du terme de rang p au précédent est $\frac{m-p+1}{p}\frac{h}{x}$, et tend vers $-\frac{h}{x}$ quand p augmente indéfiniment; la série ne sera donc convergente que si l'on a $h < x$, abstraction faite des signes. Quant au reste, on reconnaîtra, comme dans le cas de $(1+x)^m$, que si h est compris entre $+x$ et $-x$, il tend vers zéro; et la série représente par conséquent $(x+h)^m$.

6°. Soit encore

$$F(x) = \log x,$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\log e}{x}, \ldots, \quad F^n(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)\frac{\log e}{x^n};$$

on trouvera

$$\log(x+h) = \log x + \log e\left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots \pm \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}\right].$$

La convergence de la série exige encore $h < x$; dans ce cas, on reconnaîtra, comme dans le cas de $\log(1+x)$, que le reste tend vers zéro, à mesure que n augmente, et que, par conséquent, $\log(x+h)$ peut se développer par la formule de Taylor, lorsque h est compris entre $+x$ et $-x$.

On déduirait le développement de $\log(x+h)$ de celui de $\log(1+x)$, en observant que

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

et de même on aurait déduit le développement de $(x+h)^m$ de celui de $(1+x)^m$, en observant que

$$(x+h)^m = x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m.$$

On développerait aussi a^{x+h}, en remarquant que

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et il resterait à développer a^h par la formule donnée ci-dessus.

223. *Extension de la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.* — Proposons-nous maintenant de développer $F(x+h, y+k)$ suivant les puissances de h et k, $F(x, y)$ étant une fonction donnée. Pour cela nous considérerons d'abord la fonction $F(x+ht, y+kt)$, et nous la développerons suivant les puissances de t par la formule de Maclaurin : il suffira ensuite de faire $t=1$ pour avoir le développement cherché. Or, pour avoir les coefficients des différentes puissances de t, il faut prendre les dérivées successives de $F(x+ht, y+kt)$ par rapport à t, puis y faire $t=0$. On trouvera par la règle des fonctions composées de fonctions linéaires, en entendant que dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ on remplace x et y par $x+ht$, $y+kt$,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k,$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{d^2F}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}hk + \frac{d^2F}{dy^2}k^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^nF}{dt^n} = \frac{d^nF}{dx^n}h^n + n\frac{d^nF}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \ldots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n.$$

Si l'on fait $t=0$ dans toutes ces dérivées partielles, elles deviennent celles de la fonction même $F(x, y)$. On aura donc

$$F(x+ht, y+kt) = F(x, y) + \left(\frac{dF}{dx}h + \frac{dF}{dy}k\right)t + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nF}{dx^n}h^n + \ldots + \frac{d^nF}{dy^n}k^n\right)_{x+\theta ht,\ y+\theta kt},$$

x et y étant remplacés par $x+\theta ht$ et $y+\theta kt$ dans le coefficient de t^n. Faisant maintenant $t=1$, on aura le développement cherché :

$$
\begin{aligned}
(1)\quad F(x+h, y+k) = F(x, y) &+ \frac{dF}{dx}h + \frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1\ldots(n-1)} + \ldots \\
&+ \frac{dF}{dy}k + \frac{d^2F}{dx\,dy}hk + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} \\
&+ \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}F}{dx^{n-3}dy^2}\frac{h^{n-3}}{1\ldots(n-3)}\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots \\
&+ \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^nF}{dx^n}\dfrac{h^n}{1.2\ldots n} \\ + \ldots \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \dfrac{d^nF}{dy^n}\dfrac{k^n}{1.2\ldots n} \end{array} \right\}_{\substack{x+\theta h \\ y+\theta k}}
\end{aligned}
$$

ou, en employant la notation des différentielles totales, et représentant h, k par dx, dy et $F(x, y)$ par F,

$$F(x+dx, y+dy) = F + \frac{dF}{1} + \frac{d^2F}{1.2} \ldots + \frac{d^{n-1}F}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{d^nF(x+\theta\,dx, y+\theta\,dy)}{1.2\ldots n},$$

pourvu que toutes les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre n inclusivement, soient continues entre $x+h$ et $y+k$.

On aurait une formule analogue si au lieu de $F(x, y)$ on avait une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Pour que cette série, poussée indéfiniment, représente $F(x+h, y+k)$, il faut que l'ensemble des termes qui expriment le reste tende vers zéro; et l'on pourra s'en assurer en prenant la valeur de θ qui rendrait ce reste le plus grand possible, et cherchant si cette valeur maximum tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Quand il arrivera que chaque terme du reste tende vers zéro, quelque valeur qu'ait θ entre 0 et 1, il sera prouvé que le reste lui-même diminue indéfiniment; et la fonction $F(x+h, y+k)$ sera développable en série suivant les puissances entières et positives de h et k.

Si dans la formule précédente on fait $x=0$, $y=0$, on a le développement de $F(h, k)$; et si l'on change h et k en x et y, on obtient

$$(2),\ F(x,y) = F(0,0)+\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2}+\ldots$$
$$+\left(\frac{dF}{dy}\right)_0 y+\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_0 xy+\ldots+\left\{\begin{array}{l} \frac{d^nF}{dx^n}\frac{x^n}{1.2\ldots n} \\ \\ \\ \\ +\frac{d^nF}{dy^n}\frac{y^n}{1.2\ldots n} \end{array}\right\}_{\theta x,\ \theta y}$$
$$\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{1.2}+\ldots$$

Dans toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ on doit remplacer x et y par 0, excepté dans les termes du reste, où ils doivent être remplacés par θx, θy. Si ce reste tend vers zéro quand n augmente, $F(x, y)$ peut se développer en série indéfinie suivant les puissances de x et y. On a ainsi la formule de Maclaurin étendue aux fonctions de deux variables; et on l'étendrait semblablement aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Les deux formules (1) et (2) peuvent être écrites comme il suit, α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tendant vers zéro avec h et k :

$$(3)\quad \mathrm{F}(x+h, y+k) = \mathrm{F}(x, y) + \frac{d\mathrm{F}}{dx}h + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dx^n} + \alpha\right)\frac{h^n}{1.2\ldots n}$$

$$+ \frac{d\mathrm{F}}{dy}k + \ldots + \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-2}dy}\frac{h^{n-2}}{1\ldots(n-2)}\frac{k}{1} + \left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dx^{n-1}dy} + \alpha_1\right)\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{k}{1}$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$+ \frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$+ \left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dy^n} + \alpha_n\right)\frac{k^n}{1.2\ldots n};$$

$$(4)\quad \mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(0, 0) + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)_0 x + \ldots + \left(\frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dx^{n-1}}\right)_0 \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \left\{\left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dx_n}\right)_0 + \alpha\right\}\frac{x^n}{1\ldots n}$$

$$+ \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)_0 y + \ldots + \qquad\qquad \vdots$$

$$+ \left(\frac{d^{n-1}\mathrm{F}}{dy^{n-1}}\right)_0 \frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$+ \left\{\left(\frac{d^n\mathrm{F}}{dy^n}\right)_0 + \alpha_n\right\}\frac{y_n}{1.2\ldots n}.$$

Des maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

224. On dit qu'une fonction $F(x)$ prend une valeur maximum pour la valeur x_0 de x, lorsque x croissant ou décroissant à partir de x_0 dans un intervalle déterminé, quelque petit qu'il soit, la fonction $F(x)$ est toujours moindre que $F(x_0)$. La valeur de la fonction est minimum lorsque, dans les mêmes circonstances, $F(x)$ est toujours plus grand que $F(x_0)$.

Il résulte de là que, pour que x_0 donne un maximum ou un minimum pour $F(x)$, il est nécessaire et suffisant que $F(x_0+h)-F(x_0)$ soit constamment négatif ou constamment positif, quel que soit le signe de h, pourvu que sa valeur soit suffisamment petite. Il n'y a de règles générales, pour s'en assurer, que quand $F'(x)$ est continu dans le voisinage de x_0, et c'est le seul cas que nous examinerons.

On aura alors

$$F(x_0+h)-F(x_0)=hF'(x_0+\theta h).$$

Lorsque h tend vers zéro, $F'(x_0+\theta h)$ tend vers $F'(x_0)$; et si cette dernière valeur n'était pas nulle, le second membre changerait de signe avec h; la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ ne serait donc pas de signe constant, quel que fût le signe de h, et par conséquent $F(x)$ ne serait ni maximum ni minimum, pour $x=x_0$. Une condition commune au maximum et au minimum est donc $F'(x_0)=0$, et c'est seulement parmi les racines réelles de l'équation $F'(x)=0$ qu'il faut chercher les valeurs de x propres à rendre $F(x)$ maximum ou minimum. La valeur x_0 étant ainsi choisie,

on aura

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^2}{1.2}F''(x_0+\theta h).$$

La limite de $F''(x_0+\theta h)$ est $F''(x_0)$ lorsque h tend vers zéro, et si $F''(x_0)$ n'est pas nul, il est évident que pour toutes les valeurs de h positives ou négatives, comprises dans des limites suffisamment petites, le second membre et, par suite, la différence $F(x_0+h)-F(x_0)$ conservent toujours le même signe. La valeur $F(x_0)$ est donc maximum ou minimum. Elle est maximum lorsque l'on a $F''(x_0)<0$, et minimum si $F''(x_0)>0$. Mais si par hasard on a $F''(x_0)=0$, on ne peut plus rien conclure, et il faut mettre la différence sous une autre forme. On pourra écrire dans ce cas

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x_0+\theta h),$$

et comme h^3 change de signe avec h, on voit que si $F'''(x_0)$ n'est pas nul, la différence changerait de signe avec h; il n'y aurait donc ni maximum ni minimum.

Mais si $F'''(x_0)=0$, on a

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{h^4}{1.2.3.4}F^{\text{IV}}(x_0+\theta h),$$

et il est clair que si l'on a $F^{\text{IV}}(x_0)<0$, la différence est constamment négative, et $F(x_0)$ sera maximum; tandis que si l'on a $F^{\text{IV}}(x_0)>0$, elle sera constamment positive, et $F(x_0)$ sera minimum.

Les mêmes raisonnements étant continués jusqu'à ce que l'on obtienne une dérivée qui ne devienne pas nulle pour $x=x_0$, on arrive à cette conclusion générale, que, *pour que x_0 rende maximum ou minimum une fonction dont les dérivées sont continues, il faut que cette va-*

leur de x annule un nombre impair de dérivées consécutives, à partir de la première; et lorsque cette condition est remplie, on a un maximum si la dérivée suivante est rendue négative par cette valeur de x, et un minimum si elle est positive.

La recherche des maxima et minima est ainsi ramenée à la détermination des dérivées d'une fonction d'une seule variable, et des racines réelles d'une équation à une inconnue.

Si cette fonction n'est pas donnée d'une manière explicite, on formera ses dérivées par les règles connues, puis on appliquera la théorie qui vient d'être exposée, et qui est indépendante des moyens à employer pour former ces dérivées. Nous allons montrer quelle est, dans ce cas, la marche du calcul.

225. *Cas des fonctions implicites.* — Considérons une fonction liée à $m-1$ variables par $m-1$ équations données : soient, pour fixer les idées, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

u étant la fonction dont il faut trouver le maximum ou le minimum.

En les différentiant, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dF}{dx} + \dfrac{dF}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF}{du}\dfrac{du}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_1}{dx} + \dfrac{dF_1}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_1}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF_1}{du}\dfrac{du}{dx} = 0, \\ \dfrac{dF_2}{dx} + \dfrac{dF_2}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dF_2}{dz}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dF_2}{du}\dfrac{du}{dx} = 0; \end{cases}$$

au moyen de ces équations, on éliminera $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$, et la va-

leur de $\frac{du}{dx}$ qu'on en tirera, devra ensuite être égalée à zéro; ou, plus simplement, on remplacera $\frac{du}{dx}$ par zéro dans ces équations, puis on éliminera $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ entre les équations résultantes, qui sont

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_1}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

Eliminant $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, on obtiendra une équation qui, jointe aux trois autres $F = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, déterminera x, y, z, u.

On différentiera de nouveau les équations (1) et l'on obtiendra la valeur de $\frac{d^2u}{dx^2}$; on y substituera les valeurs trouvées de x, y, z, u, et l'on reconnaîtra au signe de cette expression, s'il y a maximum ou minimum. Si l'on avait $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, on chercherait les dérivées suivantes de u par rapport à x, et l'on y appliquerait la théorie précédente.

226. Pour éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ des équations (2), on peut se servir de la *méthode des multiplicateurs*. Pour cela on multipliera les deux dernières par des facteurs indéterminés λ, μ, et on les ajoutera à la première; puis on égalera à zéro les coefficients de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et le terme indépen-

dant : ce qui conduit aux trois équations

$$\frac{dF}{dx} + \lambda \frac{dF_1}{dx} + \mu \frac{dF_2}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \lambda \frac{dF_1}{dy} + \mu \frac{dF_2}{dy} = 0,$$

$$\frac{dF}{dz} + \lambda \frac{dF_1}{dz} + \mu \frac{dF_2}{dz} = 0,$$

d'où l'on éliminera λ et μ; ce qui conduira, comme on le sait par les théories de l'algèbre, à la même équation que si l'on avait éliminé autrement $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Ce procédé de calcul a souvent des avantages sur l'autre.

227. Considérons maintenant une fonction de m variables, liées par $m - 1$ équations : ce cas renferme le précédent, qui s'en déduit en supposant que la fonction se réduise à l'une des variables. Soient, par exemple, les trois équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \quad F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0,$$

et soit proposé de trouver le maximum de la fonction $f(x, y, z, u)$. Dans ce cas aux équations (1), dans lesquelles $\frac{du}{dx}$ ne serait plus zéro, on joindrait la suivante :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 0,$$

et de ces quatre équations on éliminerait $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$. Il en résulterait une équation entre x, y, z, u, qui, jointe aux équations données, déterminerait ces quatre quantités. On chercherait ensuite la dérivée seconde de $f(x, y, z, u)$

par rapport à x; elle renfermerait $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, qui seront faciles à trouver au moyen des trois équations (1); et l'on reconnaîtrait, au signe de cette seconde dérivée, si la fonction $f(x, y, z, u)$ est minimum ou maximum.

On peut remarquer que les équations entre lesquelles on a à éliminer $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ seraient les mêmes si l'on avait à chercher le maximum de l'une des fonctions F, F_1, F_2, les deux autres étant égales à zéro, ainsi que f.

Des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

228. On dit qu'une fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes x, y acquiert une valeur maximum, pour certaines valeurs, x_0, y_0, de x et y, lorsqu'en changeant ces variables en $x_0 + h$, $y_0 + k$, h et k étant des quantités arbitraires comprises entre o et des limites positives ou négatives aussi petites que l'on voudra, la fonction est constamment moindre que pour les valeurs x_0, y_0. Si, au contraire, elle était constamment plus grande, on dirait qu'elle est minimum pour ces mêmes valeurs.

D'après cela, la différence

$$F(x + h, y + k) - F(x, y)$$

doit être constamment négative, quels que soient les valeurs et les signes des quantités infiniment petites h et k, si $F(x, y)$ est maximum; et elle doit être constamment positive dans le cas du minimum. De sorte que ce sera un caractère commun au maximum et au minimum, qu'elle soit invariable de signe.

Nous ne considérerons que le cas où la fonction et ses dérivées, jusqu'à l'ordre dont on aura besoin, sont continues. Les cas de discontinuité ne donnent pas lieu à des règles générales, et se discuteront suivant la question.

D'après une formule précédente, nous aurons, en désignant par α, α_1 des quantités infiniment petites,

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{dF}{dx} + \alpha\right) h + \left(\frac{dF}{dy} + \alpha_1\right) k.$$

Si $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ sont différents de zéro, le signe du second membre, lorsque h et k tendront vers zéro, finira par être constamment le même que celui de

$$\frac{dF}{dx} h + \frac{dF}{dy} k.$$

Or cette expression change de signe si l'on change h et k de signes, sans changer leur grandeur; donc $F(x, y)$ ne serait ni maximum ni minimum, et, par conséquent, pour qu'elle puisse être l'un ou l'autre, il est indispensable que l'expression précédente soit nulle; comme h et k sont indépendants l'un de l'autre, on devra avoir

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, on aura

$$F(x+h, y+k) - F(x, y) = \left(\frac{d^2F}{dx^2} + \alpha\right)\frac{h^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^2F}{dxdy} + \alpha_1\right) hk + \left(\frac{d^2F}{dy^2} + \alpha_2\right)\frac{k^2}{1.2},$$

et si les trois dérivées du second ordre ne sont pas toutes rendues nulles par les valeurs x, y, le signe du second membre, et par suite de l'accroissement, finira par être le même que celui du trinôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^2F}{dxdy} hk + \frac{d^2F}{dy^2}\frac{k^2}{2}.$$

Il faut que cette expression soit constamment négative,

quels que soient h et k, pour que $F(x, y)$ soit maximum, et constamment positive pour qu'elle soit minimum. Si on la divise par $\frac{h^2}{2}$, ce qui n'en change pas le signe, on obtient

$$\frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}\left(\frac{k}{h}\right) + \frac{d^2F}{dx^2};$$

et pour que ce trinôme ne change pas de signe, quel que soit $\frac{k}{h}$, et ne soit jamais nul, il faut que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dxdy}\right) < \frac{d^2F}{dy^2} \cdot \frac{d^2F}{dx^2},$$

condition qui entraine que $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ soient de même signe.

Si elle est satisfaite par les valeurs de x et y tirées des deux équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

la fonction $F(x, y)$ sera maximum si $\frac{d^2F}{dx^2}$ et $\frac{d^2F}{dy^2}$ sont négatifs, et minimum s'ils sont positifs.

Si les trois dérivées du second ordre étaient nulles, il faudrait que toutes celles du troisième le fussent, et que le signe d'un polynôme du quatrième degré par rapport à $\frac{k}{h}$ fût constant : ce qui conduirait à des conditions plus compliquées. On continuerait semblablement si les dérivées du quatrième ordre étaient encore toutes nulles.

229. Ces raisonnements s'étendent facilement à une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes; seulement les conditions se compliquent de plus

en plus. Dans le cas de trois variables par exemple, on aura les trois équations

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

et il faudra que le polynôme

$$\frac{d^2F}{dx^2}h^2 + \frac{d^2F}{dy^2}k^2 + \frac{d^2F}{dz^2}l^2$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dxdy}hk + 2\frac{d^2F}{dxdz}hl + 2\frac{d^2F}{dydz}kl$$

soit constamment de même signe, quels que soient h, k, l. Pour exprimer cette condition, on divisera d'abord par h^2; et si l'on pose $\frac{k}{h} = p$, $\frac{l}{h} = q$, on aura un polynôme de la forme

$$Aq^2 + Bp^2 + 2Cpq + 2Dq + 2Ep + F.$$

En le considérant relativement à la variable q seulement, il faudra, pour qu'il ne change pas de signe, que l'on ait, quel que soit p,

$$(C^2 - AB)p^2 + 2(CD - AE)p + D^2 - AF < 0.$$

On posera sans difficulté la condition pour que ce polynôme soit de même signe quel que soit p, et l'on y ajoutera, pour qu'il soit négatif,

$$C^2 - AB < 0.$$

De même que le cas de deux indéterminées p, q se ramène à une seule, on ramènerait celui de trois à deux, et ainsi de suite.

230. *Cas d'une fonction implicite.* — Proposons-nous de trouver le maximum d'une fonction $f(x, y, z)$ en sup-

posant les variables x, y, z liées par une équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en vertu de laquelle z est une fonction implicite des deux variables indépendantes x, y.

La théorie précédente exige que les dérivées partielles de $f(x, y, z)$ par rapport à x et y soient nulles séparément ; ce qui donne

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

équations dans lesquelles on mettra pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs tirées des deux suivantes :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

On aura ainsi deux équations entre x, y, z, qui, jointes à $F(x, y, z) = 0$, détermineront x, y, z. On formera ensuite les dérivées partielles du second ordre de $f(x, y, z)$: elles dépendront de celles de z, qui seront déterminées par les règles de la différentiation des fonctions implicites à deux variables.

En général, quel que soit le nombre des variables qui entrent dans la fonction, et le nombre des équations qui les lient, il suffira de reconnaître les variables indépendantes, et d'égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à ces variables. Les équations qui en résulteront, jointes aux équations données, seront toujours en même nombre que les variables, et les détermineront. On formera ensuite facilement les dérivées partielles successives de la fonction par rapport aux variables indépendantes, et on les soumettra aux épreuves établies dans la théorie précédente.

On peut donner une autre forme au calcul du maximum ou du minimum d'une fonction de $m+n$ variables, liées par n équations, ce qui est le cas le plus général.

Il y a alors m variables indépendantes, et l'on devra égaler à zéro les dérivées partielles de la fonction par rapport à chacune d'elles; ce qui revient à dire qu'on égalera à zéro la différentielle totale de cette fonction, quelles que soient les valeurs des différentielles indépendantes. Et, pour cela, on tirera des équations données les valeurs des différentielles des variables dépendantes en fonction de celles des variables indépendantes; on les substituera dans la différentielle totale de la fonction proposée, puis on égalera à zéro les coefficients de toutes les différentielles qui y seront restées.

Soit f la fonction des $m+n$ variables x, y, z, u, etc., qui sont liées par les n équations

$$\mathrm{L}=0, \quad \mathrm{M}=0, \quad \mathrm{N}=0, \ldots,$$

on aura les $n+1$ équations suivantes :

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\frac{d\mathrm{L}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{L}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{L}}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\frac{d\mathrm{M}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{M}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{M}}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\frac{d\mathrm{N}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{N}}{dy}dy+\frac{d\mathrm{N}}{dz}dz+\ldots=0,$$

.. ..

et l'on doit tirer des n dernières les valeurs des différentielles des n variables dépendantes, les reporter dans la première, et égaler à zéro les coefficients des m différen-

tielles arbitraires qui y resteront. En d'autres termes, il faut éliminer n différentielles de ces $n+1$ équations, et égaler à zéro les coefficients de celles qui subsisteront dans l'équation finale.

Pour faire cette élimination, on multipliera les n dernières équations par des facteurs indéterminés, λ, μ, ν, etc., on les ajoutera à la première, et l'on égalera à zéro les coefficients des n différentielles des variables dépendantes, ce qui déterminera λ, μ, ν, etc., puis on égalera à zéro les coefficients des m autres variables; ce qui revient évidemment à annuler les coefficients des $m+n$ différentielles, après l'addition des équations, et à éliminer λ, μ, ν, etc., de ses $m+n$ équations; ce qui conduira à m équations entre x, y, z, etc., qui, jointes aux n équations données, déterminent les valeurs de ces variables qui peuvent donner les maxima et minima de la fonction proposée. On les distinguera ensuite au moyen des secondes dérivées partielles de la fonction, comme nous l'avons fait connaître ci-dessus.

On peut remarquer que le calcul serait le même si l'on s'était proposé de trouver le maximum ou le minimum absolu de $f+\lambda L+\mu M+\ldots$, en ayant égard ensuite aux équations $L=0$, $M=0$.

231. Remarque. — Quelquefois les variables qui entrent dans l'expression dont on cherche le maximum ou le minimum, au lieu d'être liées par des équations, sont assujetties à des inégalités. On ne peut en tenir compte de la même manière que des équations, et l'on agit suivant les cas.

Quelquefois un changement de variables dispense de tenir compte des inégalités; nous en citerons un exemple.

Supposons qu'on demande le maximum ou le minimum de la distance d'un point donné B (*fig.* 84), aux différents points d'un cercle dont le centre est A et le rayon

R; et que l'on exprime la distance BM au moyen de l'abscisse MP du point M du cercle; on aura, en faisant $AB = a$,

$$BM^2 = a^2 + R^2 - 2ax.$$

Si l'on ne remarquait pas que x est assujetti à la condition d'être compris entre $-R$ et $+R$, et qu'on appliquât la règle ordinaire, on écrirait $2a = 0$; ce qui ferait penser que le problème est impossible. Une discussion bien simple montre qu'en faisant passer x de $-R$ à $+R$, le maximum a lieu pour $x = -R$ et le minimum pour $x = +R$. Mais dans d'autres cas ce pourrait être très-difficile.

Si l'on posait $x = R\cos\varphi$, φ serait l'angle MAB, et il n'y aurait plus aucune condition d'inégalité à exprimer. On aurait alors

$$BM^2 = a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi,$$

et la règle ordinaire donnerait $\sin\varphi = 0$, d'où l'on tirerait $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, qui donnent le minimum et le maximum de BM.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Tangentes et normales aux courbes planes. Expression générale de la longueur de la tangente, de la sous-tangente, de la normale et de la sous-normale.

232. Plusieurs des questions que nous allons considérer n'auront pour objet que l'application des notations du calcul différentiel à des questions étudiées dans le premier livre, ou l'extension et la généralisation de ces mêmes questions. Nous commencerons par les tangentes et les normales.

Nous avons appelé, en général, *tangente à une courbe* la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque, et x', y' les coordonnées du point de cette courbe, auquel on veut mener une tangente; l'équation de la sécante menée par ce point et par celui dont les coordonnées sont $x' + \Delta x'$, $y' + \Delta'$, et qui appartient aussi à la courbe, sera, dans un système quelconque d'axes,

$$y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}(x - x').$$

A mesure que le second point d'intersection se rapproche du premier, $\frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ tend vers la dérivée de y par rapport à x, correspondante à la valeur particulière x'; il existe donc une direction limite pour la sécante, comme nous l'avons déjà établi; et, d'après les notations convenues, l'équation de cette droite que nous appelons *tangente* est

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

Le coefficient $\frac{dy'}{dx'}$ sera déterminé en fonction de x', y', d'après les règles du calcul différentiel, au moyen de l'équation $F(x, y) = 0$, qui donne $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}}$.

L'équation de la tangente devient ainsi

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente, menée par le point de contact. Si les axes sont rectangulaires, son équation sera

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}}(x - x'), \quad \text{ou} \quad y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x'),$$

ou encore

$$(y - y')\frac{dF}{dx'} - (x - x')\frac{dF}{dy'} = 0.$$

Si les axes des coordonnées font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de la normale aura la forme sui-

vante :

$$(y-y')\left(\frac{dF}{dx'}-\frac{dF}{dy'}\cos\theta\right)-(x-x')\left(\frac{dF}{dy'}-\frac{dF}{dx'}\cos\theta\right)=0.$$

Si les coordonnées x', y' n'étaient pas données et que la tangente, ou la normale, fût assujettie à passer par un point donné, ou bien à être parallèle à une droite donnée, on obtiendrait immédiatement, d'après les équations précédentes, une équation entre x', y', qui, jointe à celle de la courbe, déterminerait ces deux inconnues. Si, au lieu de chercher les solutions réelles de ces deux équations, on construisait les lieux géométriques qu'elles représentent, en y regardant x', y' comme variables, les points d'intersection de ces lieux, dont l'un est la courbe proposée, seraient les points de contact cherchés.

233. On appelle *sous-tangente* et *sous-normale* les parties de l'axe des x comprises respectivement entre le pied de l'ordonnée du point de contact et les points où cet axe est rencontré par la tangente et la normale. Elles ont pour expression la valeur de $x-x'$ relative à $y=0$ dans les équations respectives de la tangente et de la normale. Elles seront dirigées vers les x positifs ou négatifs, à partir du pied de l'ordonnée, suivant que $x-x'$ sera positif ou négatif.

Nous appellerons *longueurs de la tangente et de la normale* les parties de ces lignes comprises entre le point de contact et les points où elles coupent respectivement l'axe des x.

Il est facile d'obtenir l'expression de ces différentes lignes. Nous supposerons, pour plus de simplicité, les axes rectangulaires, et nous représenterons par T la tangente, par N la normale, par S_t la sous-tangente, et par S_n la sous-normale. Cela posé, on trouvera facilement les for-

mules suivantes :

$$S_t = -\frac{y'}{\frac{dy'}{dx'}} = -\frac{y'\,dx'}{dy'}, \quad S_n = y'\frac{dy'}{dx'},$$

$$T = y'\sqrt{1+\frac{dx'^2}{dy'^2}}, \qquad N = y'\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

EXEMPLES.

Ellipse et hyperbole. — Si l'on applique toutes ces formules à l'ellipse et à l'hyperbole, renfermées dans l'équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = \pm a^2b^2,$$

on trouvera les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{l} a^2y'(y-y') \pm b^2x'(x-x') = 0 \\ \text{ou} \\ a^2yy' \pm b^2xx' = \pm a^2b^2 \end{array}\right\}, \text{ équation de la tangente;}$$

$b^2x'(y-y') \mp a^2y'(x-x') = 0$, équation de la normale;

$$S_t = \frac{a^2-x'^2}{x'}, \qquad S_n = \mp\frac{b^2x'}{a^2};$$

$$T = \frac{y'}{b^2x'}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}, \quad N = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}.$$

Parabole. — Si l'on considère la parabole ayant pour équation $y^2 = 2px$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} (y-y')y' - p(x-x') = 0 \\ \text{ou} \\ yy' = p(x+x') \end{array}\right\}, \text{ équation de la tangente;}$$

$y - y' = -\frac{y'}{p}(x-x')$, équation de la normale,

$$S_t = 2x', \qquad S_n = p,$$

$$T = \sqrt{2x'(2x'+p)}, \quad N = \sqrt{p(2x'+p)}.$$

Logarithmique. — Considérons maintenant la logarithmique ayant pour équation $y = a\,\mathrm{l}\,\frac{x}{m}$; a et m sont des lignes données, et les logarithmes sont relatifs à la base de Neper, ce qui ne diminue en rien la généralité de l'équation. On aura, dans ce cas,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}:$$

$$y - y' = \frac{a}{x'}(x - x'), \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\frac{x'}{a}(x - x'), \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = -x'\,\mathrm{l}\,\frac{x'}{m}, \quad S_n = \frac{y'a}{x'} = \frac{a^2\,\mathrm{l}\,\frac{x'}{m}}{x'}.$$

Si l'on prend la sous-tangente et la sous-normale sur l'axe des y au lieu de l'axe des x, elles auront pour expression la valeur de $y - y'$ relative à $x = 0$.

On trouvera ainsi

$$S_t = -a, \quad S_n = \frac{x'^2}{a}.$$

Cycloïde. — Considérons encore la *cycloïde*, qui jouit de plusieurs propriétés très-remarquables.

Elle est engendrée, comme nous l'avons vu, par un point de la circonférence d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une droite indéfinie à laquelle il est tangent. Elle se compose d'une infinité de branches superposables, ayant chacune pour base une partie de la droite égale à la circonférence du cercle mobile.

Prenons la droite donnée pour axe des x, et l'origine en un quelconque des points où elle est rencontrée par la courbe. Soient B (*fig.* 85) le point de contact du cercle générateur avec l'axe des x, et l'arc MB égal à AB; le

point M appartiendra à la cycloïde. Désignons par ω l'angle MOB qui pourra prendre toutes les valeurs depuis o jusqu'à $\pm\infty$; il est facile d'établir les équations suivantes, dans lesquelles a désigne le rayon du cercle :

$$x = a(\omega - \sin\omega), \quad y = a(1 - \cos\omega).$$

Ces équations ont lieu dans toute l'étendue de la courbe. L'équation entre x et y sera

$$x = a \operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2};$$

mais il faudra avoir soin de changer alternativement le signe du radical dans les deux moitiés de chacune des branches successives. Différentiant ces équations, on aura

$$dx = a(1 - \cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \quad dy = a\sin\omega\,d\omega,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

$$y - y' = \sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}(x - x'), \text{ équation de la tangente;}$$

$$y - y' = -\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}(x - x'), \text{ équation de la normale;}$$

$$S_t = y'\sqrt{\frac{y'}{2a-y'}}, \quad S_n = \sqrt{2ay' - y'^2} = BP,$$

$$T = y'\sqrt{\frac{2a}{2a-y'}}, \quad N = \sqrt{2ay'} = MB.$$

La valeur de S_n ou de N prouve que la ligne MB est la normale, et, par suite, que la tangente est MC.

Formules analogues en coordonnées polaires.

234. Soit l'équation $F(\theta, r) = 0$ entre les coordonnées

polaires θ et r d'une courbe à laquelle on veut mener la tangente au point M (*fig.* 86). Nous avons déjà vu comment on détermine l'angle μ que fait cette tangente avec le rayon vecteur OM; le triangle KMN donne

$$\frac{KM}{KN} = \frac{\sin N}{\sin KMN},$$

d'où, en passant aux limites,

$$\frac{rd\theta}{dr} = \tang \mu = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}.$$

La sous-tangente et la sous-normale se rapportent à la perpendiculaire au rayon vecteur, menée par le pôle. On trouvera immédiatement les formules suivantes :

$$S_t = r \tang \mu = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}}, \qquad S_n = \frac{dr}{d\theta},$$

$$T = r\sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}.$$

Exemples.— 1°. Soit d'abord la spirale d'Archimède :

$$r = a\theta, \quad \tang \mu = \theta, \quad S_n = a.$$

On voit que la sous-normale est constante et que la courbe, tangente à l'axe, au pôle, tend de plus en plus à être perpendiculaire au rayon vecteur.

Soit maintenant l'équation $r = \frac{a}{\theta}$ de la spirale hyperbolique

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a}{\theta^2}, \quad \tang \mu = -\theta, \quad S_t = -a.$$

Ainsi, dans cette courbe, c'est la sous-tangente qui est constante.

2°. Considérons encore la spirale logarithmique dont l'équation est

$$r = ac^{m\theta}, \quad \frac{dr}{d\theta} = mac^{m\theta},$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{1}{m}, \quad S_t = \frac{r}{m}, \quad S_n = mr,$$

$$T = r\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \quad N = r\sqrt{1+m^2}.$$

La valeur de $\operatorname{tang}\mu$ montre que le rayon vecteur est toujours également incliné sur la tangente.

Les valeurs de S_t et S_n prouvent que les extrémités de la normale et de la tangente décrivent des spirales identiques avec la première, et semblablement situées par rapport à des axes différents passant par le même pôle.

Les mêmes formules s'appliquent très-simplement aux sections coniques.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

235. On appelle *asymptote d'une branche de courbe infinie* une droite telle, que les points de cette courbe s'en approchent indéfiniment sans jamais la rencontrer, à mesure qu'ils s'éloignent indéfiniment sur la branche que l'on considère.

Toute asymptote non parallèle à l'axe des y aura une équation de la forme

$$y = kx + l,$$

k et l ayant des valeurs finies.

La branche de courbe aura pour équation

$$y = kx + l + \mathrm{V},$$

V étant une fonction connue ou inconnue de x, mais qui tend vers zéro à mesure que x augmente. On en déduit $k = \lim.\frac{y}{x}$, $l = \lim.(y - kx)$. Réciproquement, des valeurs de k et l ainsi déterminées pour une branche réelle de courbe correspondront nécessairement à une asymptote de cette branche, puisque $y - kx - l$ a pour limite zéro, pour les points de cette branche dont l'x croît indéfiniment.

Les asymptotes parallèles à l'axe des x correspondront aux valeurs de k égales à zéro. Pour trouver les asymptotes parallèles à l'axe des y, on considérerait l'équation

$x = k'y + l'$ et l'on ne s'occuperait que des valeurs de k' égales à zéro.

236. Appliquons ces considérations à une courbe dont l'équation peut se partager en plusieurs parties homogènes par rapport à x, y, et peut être mise, par conséquent, sous la forme suivante, où nous supposerons les exposants de x décroissants :

$$x^m \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$$

Soit $\frac{y}{x} = p$, d'où $y = px$; il faudra d'abord trouver la limite de p pour $x = \infty$.

La substitution donne

$$x^m \mathrm{F}(p) + x^n f(p) + \ldots = 0,$$

d'où

$$\mathrm{F}(p) + \frac{1}{x^{m-n}} f(p) + \ldots = 0;$$

et à mesure que x augmente, $\mathrm{F}(p)$ s'approche de zéro : donc les valeurs limites de p, c'est-à-dire les valeurs de k, sont des racines réelles de l'équation

$$\mathrm{F}(k) = 0.$$

Il reste à trouver la valeur de l correspondante à une valeur de k; pour cela on posera $y - kx = t$, et l'on cherchera la limite de t.

L'équation de la courbe devient, par cette substitution,

$$x^m \mathrm{F}\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^n f\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots = 0;$$

mais puisque $\mathrm{F}(k) = 0$, on a

$$\mathrm{F}\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} \mathrm{F}'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right),$$

θ étant compris entre 0 et $+1$; on a donc

$$x^{m-1}\,tF'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^n f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

ou

$$tF'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{m-n-1}}f\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0.$$

Si $m=n+1$, $x=\infty$ donnera pour limite de t, c'est-à-dire pour valeur de l,

$$l=-\frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Si $m>n+1$, on a

$$l=0.$$

Si $m<n+1$, t n'a pas de limite, et il n'y a pas d'asymptote pour cette valeur de k. Ainsi, en général, l'équation de l'asymptote sera $y=kx-\frac{f(k)}{F'(k)}$, $f(k)$ se rapportant aux termes de degré $m-1$, et devenant nulle si $n<m-1$: il n'y a pas d'asymptote si $n>m-1$.

Si $n<m-1$, l'équation de l'asymptote est de la forme $y-kx=0$.

Si, dans le cas de $n=m-1$, la valeur de k tirée de $F(k)=0$ satisfaisait aux équations $F'(k)=0$, $f(k)=0$, l'équation de l'asymptote deviendrait indéterminée; et l'on ne pourrait en tirer l'équation cherchée, parce que le terme en x^{m-2} devient du même ordre que les deux premiers, et ne peut plus être négligé.

Dans ce cas, l'équation qui détermine la limite de t se mettrait sous cette forme :

$$\frac{x^{m-3}t^2}{1.2}F''\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^{m-2}\,tf'\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right)$$
$$+x^{m-2}\varphi\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots=0,$$

$x^{m-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ étant le troisième terme de l'équation proposée.

Divisant par x^{m-2} et passant à la limite, l sera déterminé par l'équation

$$l^2\frac{F''(k)}{2}+lf'(k)+\varphi(k)=0.$$

On agirait semblablement si ces trois nouvelles fonctions devenaient nulles, pour cette valeur particulière de k.

Si $n<m-1$, et $F'(k)=0$, on n'a plus nécessairement $l=0$.

237. Si la courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on connaitra toutes les directions qui peuvent donner des asymptotes, en cherchant toutes les valeurs de θ qui donnent à r une valeur infinie.

Soit α une de ces valeurs de θ, on cherchera la limite de $r\sin(\theta-\alpha)$ qui est l'expression de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur la droite menée par le pôle sous l'angle α avec l'axe. Cette limite sera la distance de cette droite à l'asymptote, et le signe dont elle sera affectée fera connaître de quel côté elle se trouve. Si le produit $r\sin(\theta-\alpha)$ croît indéfiniment, il n'y a pas d'asymptote dans cette direction.

On trouvera le même résultat en cherchant la limite de $r(\theta-\alpha)$ ou celle de $r\sin(\theta-\alpha)$, puisque la limite de $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\theta-\alpha}$ est l'unité.

Soit pour exemple l'équation générale

$$F(\theta)r^m+f(\theta)r^{m-1}+A_2r^{m-2}+\ldots+A_m=0,$$

A_2, A_3, ..., A_m étant des fonctions quelconques de θ.

L'équation $F(\theta) = 0$ fera connaître toutes les directions possibles des asymptotes. Soit α une des racines réelles de cette équation et $\theta = \alpha + \delta$; puisque $F(\alpha) = 0$, on aura $F(\alpha + \delta) = \delta F'(\alpha + \theta\delta)$, et l'équation de la courbe devient alors, en divisant par r^{m-1},

$$r\delta . F'(\alpha + \theta\delta) + f(\alpha + \delta) + \ldots = 0.$$

Lorsque r devient infini, il ne reste plus que les deux premiers termes, et l'on trouve

$$\lim. r(\theta - \alpha) = \lim. r\delta = -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}.$$

Si l'on avait $f(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$, on agirait comme dans le cas précédent.

Exemples. — 1°. Soit proposé de trouver les asymptotes de la courbe ayant pour équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$F(k) = ak^2 + bk + c,$$
$$f(k) = dk + e.$$

$k = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ce qui exclut l'ellipse.

L'équation de ces asymptotes devient

$$y = kx - \frac{dk + e}{2ak + b}.$$

Le dernier terme devient infini dans le cas de la parabole, et, par conséquent, l'hyperbole est la seule courbe du second degré qui ait des asymptotes.

2°. Soit maintenant $y = ae^{mx}$, équation de la logarithmique, qui ne rentre pas dans la classe générale considérée ci-dessus, parce que e^{mx} n'est pas d'un degré fini par rapport à x.

On cherchera toujours la limite de $\frac{y}{x}$, et ensuite celle de $y - kx$.

On trouve immédiatement $k = 0$; ensuite la limite de y est zéro, et correspond aux x négatifs. L'asymptote est donc l'axe des x, et dans la direction seule des x négatifs.

3°. Dans le cas de la courbe, appelée *folium de Descartes*, et dont l'équation est

$$y^3 + x^3 - 3^2axy = 0,$$

on trouvera une asymptote ayant pour équation

$$y = -x - a.$$

4°. L'équation $y^2 = \cos\frac{y}{x}$ conduit à $k = 0$, $l = \pm 1$. La courbe a donc pour asymptotes les deux droites

$$y = +1, \quad y = -1.$$

5°. L'équation $y = a\frac{\sin x}{x}$ représente une courbe qui a l'axe des x pour asymptote, et qui a cela de remarquable, qu'elle passe alternativement d'un côté et de l'autre de son asymptote, jusqu'à l'infini.

6°. L'équation $y = a \sin\frac{b}{x}$ donnera encore $y = 0$ pour l'équation d'une asymptote.

Elle offre en outre une particularité remarquable : elle s'approche indéfiniment de l'axe des y dans la partie comprise entre $y = -a$, $y = +a$. C'est donc là un véritable asymptotisme, puisque la longueur de la courbe augmente sans limite, en se rapprochant indéfiniment d'une droite fixe.

Cette courbe ne diffère pas de celle qu'on obtiendrait en enveloppant sur un cylindre une hyperbole équilatère

dont une asymptote serait parallèle au plan de la base, et projetant la courbe résultante sur un certain plan passant par l'axe du cylindre.

7°. Soit maintenant l'équation polaire d'une hyperbole, par rapport à un de ses foyers,

$$(a - c\cos\theta)\, r = b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}, \quad \lim.\, r\delta = b.$$

Les deux asymptotes se trouveront ainsi déterminées.

Soit encore la spirale hyperbolique

$$(\theta - \omega)\, r = a;$$

on trouvera

$$\alpha = \omega, \quad \lim.\, r\delta = a.$$

Des asymptotes considérées comme limites des tangentes.

238. En partant de l'équation ci-dessus

$$(1) \qquad x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

qui renferme non-seulement toutes les courbes algébriques, mais encore toutes celles dont les termes ont des degrés déterminés par rapport à x et y, on arrive à une propriété remarquable des asymptotes, qui consiste en ce qu'elles peuvent être considérées comme limites des tangentes à la branche de courbe à laquelle elles se rapportent.

Nous pouvons supposer à l'axe des y une direction arbitraire, et alors $\frac{y}{x}$ tendra vers une limite finie k qui sera racine de l'équation

$$F(k) = 0.$$

Cela posé, soit $\varphi(x, y)$ le premier membre de l'équation (1), on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)},$$

$$\varphi'(x) = -\frac{y}{x^2}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right]$$

$$+ mx^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right],$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{mx^{m-1} F\left(\frac{y}{x}\right) + nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{x^{m-1} F'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Or, si l'on fait croître x indéfiniment, $F\left(\frac{y}{x}\right)$ tendra vers zéro, et l'équation (2) donnera

$$(3) \qquad \lim. \frac{y}{x} = \lim. \frac{dy}{dx}.$$

Ainsi d'abord, lorsqu'une branche de courbe a une asymptote, sa direction est la limite de celles des tangentes à cette même branche.

Cherchons maintenant la limite du point où la tangente rencontre l'axe des y, et dont l'ordonnée est $y - x\frac{dy}{dx}$.

L'équation (2) donne

$$(4) \qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx F\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n}{x^{m-n-1}} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{F'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Supposons d'abord $n = m - 1$ ou $n < m - 1$, auquel cas la branche de courbe aura une asymptote; on aura alors

$$(5) \qquad y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1)f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}.$$

Or cette expression peut être simplifiée au moyen de l'équation (1). En effet, en divisant cette dernière par x^{m-1} et supposant d'abord $n = m - 1$, on obtient, en faisant croître x indéfiniment,

$$\lim.\left[x\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

L'équation (5) donne ainsi

$$\lim.\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim.\frac{-f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots}{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots},$$

et, par suite,

$$\lim.\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f(k)}{\mathrm{F}'(k)};$$

donc la tangente coupe l'axe des y en un point dont la limite coïncide avec celui où ce même axe est coupé par l'asymptote.

Si l'on avait $n < m - 1$, la fonction f n'existerait pas, et l'on trouverait

$$\lim.\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

L'asymptote et la limite des tangentes passeraient alors par l'origine.

Supposons enfin $n > m - 1$, alors la branche de courbe infinie n'a pas d'asymptote. Faisons $n = m - 1 + \delta$; l'équation (1), divisée par x^n, donnera

$$\lim. \left[x^{1-\delta} F\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) \right] = 0;$$

et, en introduisant cette condition dans l'équation (4), on trouvera que $y - x\frac{dy}{dx}$ deviendra infini avec x, et, par conséquent, qu'il n'y a pas de limite pour le point de rencontre de la tangente avec l'axe des y.

On arrivera donc, dans tous les cas, au même résultat, soit en cherchant l'asymptote d'une branche infinie, soit en cherchant la limite des tangentes.

Mais il faut bien remarquer que nous entendons ici, par limite des tangentes, la droite qui, menée sous l'inclinaison limite, coupe l'un des axes, celui des y par exemple, au point limite où cet axe est coupé par la tangente variable. Ce ne serait pas déterminer une droite, que de dire simplement qu'elle est la limite d'une droite mobile qui ne reste pas toujours parallèle à elle-même. En effet, cette droite est située de la même manière par rapport à des droites parallèles entre elles, quoiqu'elle les coupe en des points qui peuvent être fort éloignés les uns des autres; et si elle s'approche indéfiniment de l'une de ces parallèles, elle s'approche également des autres, à partir des points respectifs où elle les coupe.

La démonstration que nous venons de donner se déduit si simplement de la forme de l'équation (1) pour laquelle nous avions calculé l'équation générale des asymptotes, que nous avons cru ne pas devoir l'omettre. Mais précisément parce qu'elle est fondée sur cette forme, elle n'a pas toute la généralité qu'on pourrait désirer, et nous

allons traiter la question, indépendamment de toute forme particulière d'équation.

239. *Une asymptote est, en général, la limite des tangentes.* Considérons une branche infinie de courbe quelconque ayant une asymptote AX (*fig.* 85); cette courbe n'étant pas donnée par une équation, il est nécessaire d'en connaître certaines conditions géométriques bien déterminées, sur lesquelles le raisonnement puisse se fonder. Nous admettrons, comme seule définition de cette courbe, qu'elle est telle, que depuis un certain point B jusqu'à l'infini, ses points aillent constamment en s'approchant de AX, et que l'inclinaison de sa tangente sur AX varie toujours dans le même sens. Il est d'abord évident que depuis le point B la courbe est convexe vers AX: car la tangente en un point quelconque rencontrera AX au delà de son point de contact, puisque les distances à AX vont en diminuant de ce côté; si donc la courbe était concave vers AX, et, par suite, comprise entre AX et sa tangente, elle couperait AX, ce qui est contre l'hypothèse.

Cela posé, menons une droite fixe quelconque AY; prenons sur cette droite un point P plus rapproché de AX que ne l'est le point B, et menons la droite indéfinie PU parallèle à AX. Elle coupera nécessairement la courbe en un seul point M, qui sera d'autant plus éloigné de AY que AP sera plus petit.

Si maintenant on joint le point P successivement aux différents points de la courbe situés au delà de M, cette droite coupera nécessairement AX, et, par conséquent, rencontrera auparavant la courbe en un second point. Cette sécante, tournant continuellement autour de P, deviendra tangente dans une position unique PQ, et le point de contact N sera au delà de M. Or les tangentes aux

points situés au delà de N couperont nécessairement PQ entre N et Q, et AX au delà de Q; elles couperont donc AY entre A et P; et comme PA peut être supposé aussi petit qu'on voudra, il s'ensuit que les tangentes à la courbe couperont AY en des points qui iront constamment en s'approchant de A, et que leur distance à ce point a pour limite zéro. Comme d'ailleurs l'angle qu'elles font avec AX a zéro pour limite, on peut énoncer la proposition suivante, qu'il faut entendre avec les restrictions indiquées ci-dessus :

Lorsqu'une branche infinie a une asymptote, les tangentes à cette branche coupent une droite fixe non parallèle à l'asymptote, en des points qui ont une limite à mesure que le point de contact s'éloigne indéfiniment; leur direction a de même une limite, et si l'on mène par le point limite une droite dans cette dernière direction, elle coïncidera avec l'asymptote.

240. Si les conditions géométriques que nous avons admises n'existaient pas, il serait possible que la branche de courbe eût une asymptote, et que les tangentes n'eussent pas de limite.

En effet, si l'inclinaison de la courbe ne variait pas toujours dans le même sens, les tangentes aux points situés au delà de N pourraient ne pas couper PQ entre P et Q, et, par suite, AY entre P et A; rien ne prouverait alors que leur point de rencontre avec AY aurait une limite, et il est même facile de trouver des cas où cela n'a pas lieu.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = \frac{a + \sin x}{x^m},$$

m étant positif et $a > 1$. La courbe est tout entière au-

dessus de l'axe des x; de plus, elle s'en approche indéfiniment, et, par conséquent, cet axe en est une asymptote. Cherchons maintenant le point où la tangente coupe l'axe des y. Son ordonnée $y - x\frac{dy}{dx}$ a la même limite que $-x\frac{dy}{dx}$, puisque l'ordonnée y du point de contact tend vers zéro. Mais on a

$$x\frac{dy}{dx} = x^{1-m}\cos x - \frac{m(a+\sin x)}{x^m},$$

expression dont le dernier terme tend vers zéro. Il reste donc à trouver la limite de $x^{1-m}\cos x$. Or cette limite est zéro lorsque l'on a $m > 1$, et alors la tangente a une limite, qui se confond avec l'asymptote. Mais si l'on a

$$m = 1, \quad \text{ou} \quad m < 1,$$

$x\frac{dy}{dx}$ sera indéterminé; il pourra avoir toutes les valeurs comprises entre deux limites finies dans le premier cas, et infinies dans le second. D'où l'on voit qu'*une branche de courbe peut avoir une asymptote, sans qu'il existe une limite pour ses tangentes.*

Il est bon de remarquer que la tangente, considérée à partir de son point de contact, tendrait indéfiniment vers l'axe des x, parce que y et $\frac{dy}{dx}$ tendent vers zéro; mais si on la prolonge jusqu'à l'axe des y, elle s'écarte de l'axe des x, de quantités finies, ou même croissant indéfiniment, comme nous venons de le démontrer. Or, dans ce cas, on dit qu'une droite n'a pas de limite, parce que c'est toujours à l'origine et aux axes fixes qu'on la rapporte.

241. *Toute limite des tangentes est asymptote.* — Cette réciproque de la proposition précédente peut être démontrée comme il suit:

Soit X′X (*fig.* 86) une droite vers laquelle convergent les tangentes à une branche de courbe infinie; et par là nous entendons que ces tangentes font avec X′X un angle qui tend vers zéro à mesure que les points de contact s'éloignent indéfiniment; et que si par un point A pris sur X′X, on mène un axe fixe AY, il est coupé par la tangente variable en un point dont la limite est A.

Considérons maintenant une tangente quelconque PQ: il est admis qu'à partir d'une certaine position du point de contact jusqu'à l'infini, le point P va en se rapprochant indéfiniment de A, et que l'angle AQP tend vers zéro, ces deux quantités conservant leurs signes, ou en changeant d'une manière quelconque. Or il est évident que si le point de contact M est toujours situé dans la partie PQ de la tangente, quel que soit l'angle des axes dans lequel elle se trouve, sa distance MT à X′X est moindre que PA, et, par conséquent, il s'approche indéfiniment de X′X, puisque la limite de PA est zéro par hypothèse. Donc, dans ce cas, la ligne X′X est une asymptote.

Ce cas est celui qui aura lieu, par exemple, lorsqu'à partir d'une certaine position de la tangente, le point Q ira toujours en s'éloignant, et le point P en se rapprochant de A; car les intersections successives des tangentes se feront toujours dans l'angle YAX, et, par suite, les limites de ces points, ou les points même de la courbe, y seront renfermés.

Il reste donc à considérer le cas où le point de contact serait en dehors de la partie PQ. Or nous allons démontrer que la tangente ne pourrait alors avoir pour limite X′X, à moins que les points de cette branche de courbe ne s'approchent indéfiniment de cette même ligne X′X, qui sera par conséquent encore une asymptote.

Concevons, en effet, une branche de courbe infinie dont l'ordonnée ne tende pas vers zéro, et dont la tangente

fasse avec l'axe AX (*fig.* 87) un angle ayant zéro pour limite.

L'ordonnée pourra croître indéfiniment ou rester limitée : dans ce dernier cas, elle pourra tendre vers une valeur déterminée; elle pourra même osciller entre des limites déterminées, de telle sorte que, quelque grand que soit x, la courbe reste, ou du moins revienne, à certains intervalles, au-dessus d'une parallèle située à une distance finie de AX. Or nous allons démontrer que, dans ces différentes hypothèses, AX ne peut être la limite des tangentes.

En effet, supposons d'abord que l'ordonnée croisse indéfiniment, et menons à AX une parallèle CV, à une distance AC aussi grande que l'on voudra de AX; cette parallèle rencontrera nécessairement la courbe en un certain point M, et la distance CM pourra dépasser toute grandeur donnée. Si maintenant par le point C et un point M′ de la courbe, situé au-dessus de CV à une distance aussi petite qu'on voudra de M, on fait passer une ligne droite, on sait que, quelque petit que soit l'angle qu'elle fera avec AX, elle finira par rencontrer la courbe en un second point au delà de MM′, puisque l'angle de la tangente à la courbe avec AX tend vers zéro. Donc, en faisant tourner cette droite dans le même sens, elle finira par devenir tangente en un point situé au delà de M. Donc, en prenant des points assez éloignés sur la courbe, la tangente coupera AY en des points C situés à des distances aussi grandes qu'on voudra de A. Donc enfin les tangentes n'ont pas pour limite AX.

Supposons maintenant que l'ordonnée ne croisse pas indéfiniment, et que les points de la courbe restent constamment au-dessus d'une droite BU menée parallèlement à AX à une distance déterminée différente de zéro, ou bien passent au-dessus et au-dessous de BU à des intervalles

quelconques. Considérons un point M de la courbe situé au-dessus de BU à une distance de AY plus grande qu'une quantité donnée quelconque, et menons, par ce point, MD parallèle à AX (*fig.* 88). En raisonnant comme dans le cas précédent, nous démontrerions qu'il existe une tangente en un point situé sur la courbe, au delà de M, et rencontrant AY en D, et, par conséquent, au-dessus de B; d'où il suit que AX n'est pas la limite des tangentes.

Donc enfin AX ne serait pas la limite des tangentes si les points de la courbe étaient situés en dehors de la partie de la tangente comprise entre les deux axes, et qu'en même temps leur distance à AX ne tendît pas vers zéro. Mais si cette distance tend vers zéro, AX est asymptote. D'où il résulte enfin que, quelque part que soit situé le point de contact sur la tangente variable, si cette droite tend vers une limite, dans le sens précédemment défini, *cette limite est une asymptote.*

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIELLES ET DÉRIVÉES DE L'ARC, DE L'AIRE, ET DE L'INCLINAISON D'UNE COURBE PLANE. USAGE DES DÉRIVÉES POUR RECONNAITRE LA CONCAVITÉ OU LA CONVEXITÉ.

242. Désignons par s la longueur de l'arc, prise à partir d'un certain point de la courbe : nous avons vu que son accroissement infiniment petit Δs ne pouvait différer que d'un infiniment petit du second ordre, de la partie de la tangente terminée à l'ordonnée extrême, c'est-à-dire de $\Delta x\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$. Donc la limite de $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ est $\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$; et l'on a

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},\quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Dans un système de coordonnées polaires on aura

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}},\quad \text{ou}\quad ds=\sqrt{r^2d\theta^2+dr^2}.$$

243. L'aire comprise entre deux ordonnées, l'axe des x et l'arc d'une courbe, croît d'une quantité comprise entre deux parallélogrammes dont la limite du rapport est l'unité, à mesure que Δx tend vers zéro : on peut donc, comme nous l'avons déjà dit, prendre l'un quelconque des deux au lieu de l'accroissement même de l'aire, sans altérer la limite du rapport à Δx. Si donc on désigne

l'aire par A, on aura

$$\frac{dA}{dx} = y \sin\theta, \quad \text{ou} \quad dA = y dx \sin\theta,$$

θ désignant l'angle des axes.

Dans un système de coordonnées polaires, les deux parallélogrammes seront remplacés par des secteurs semblables, et l'on trouvera

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{r^2}{2}, \quad \text{ou} \quad dA = \tfrac{1}{2} r^2 d\theta.$$

244. L'inclinaison φ de la tangente sur l'axe de x est déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dy}{dx};$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dx} = \cos^2\varphi \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$d\varphi = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Cette valeur de $d\varphi$ est ce que nous nommerons *angle de contingence;* il peut être pris pour $\Delta\varphi$, qui est celui des deux tangentes aux points dont les abscisses diffèrent de dx, sans que les limites des rapports soient altérées.

Dans un système de coordonnées polaires, l'angle de deux tangentes consécutives, ou la différence infiniment petite de l'inclinaison φ de la tangente sur l'axe fixe, est égal à l'angle des deux rayons vecteurs correspondants, plus l'accroissement de l'inclinaison de la tangente sur le

rayon qui passe au point de contact. On trouvera ainsi

$$d\varphi = \frac{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}\,d\theta.$$

Concavité et convexité.

245. On dit qu'une courbe est concave en un de ses points par rapport à une droite donnée, lorsque, à partir de ce point, ses deux branches commencent par être comprises dans l'angle aigu formé par la droite donnée et la tangente à la courbe au point que l'on considère. Lorsque, au contraire, les deux branches commencent par être en dehors de cet angle, on dit que la courbe est convexe en ce point par rapport à la droite.

Nous allons faire connaître les caractères analytiques qui correspondent à ces deux circonstances, en supposant qu'on ait pris la droite donnée pour axe des x. Dans le cas de la concavité, l'ordonnée orthogonale de la courbe doit être moindre en grandeur absolue que celle de la tangente au point que l'on considère, pour les valeurs de x infiniment voisines de celle qui correspond à ce point. Ainsi l'ordonnée de la courbe sera plus petite que celle de la tangente lorsqu'elle sera positive, et plus grande lorsqu'elle sera négative. L'inverse aura lieu pour la convexité.

Or, en désignant par x', y' les coordonnées du point donné, et par h une quantité positive ou négative, qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, on a pour les points de la courbe,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}h + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h},$$

et pour la tangente au point (x', y'),

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'} h;$$

donc, si y' est positive, la courbe sera concave si le terme $\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x'+\theta h}$ est négatif, et convexe s'il est positif. Or, si l'on n'a pas $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, le signe du terme en question sera le même que celui de $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ quel que soit le signe de h. Les deux branches de la courbe commencent donc par être d'un même côté de la tangente; ce qui montre que notre définition des tangentes renferme celle des anciens; et l'étude des points singuliers nous fera voir qu'elle est plus générale. Supposant donc que $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ ne soit pas nul, on voit que pour les points de la courbe qui sont du côté des y positifs, la condition de concavité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} < 0$, et la condition de convexité est $\frac{d^2y'}{dx'^2} > 0$. C'est l'inverse pour les points situés du côté des y négatifs.

Si $\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0$, il faudra que l'on ait $\frac{d^3y'}{dx'^3} = 0$ pour que les deux branches de la courbe soient d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point que l'on considère, et c'est au signe de $\frac{d^4y'}{dx'^4}$ qu'on reconnaîtra la concavité ou la convexité. De même, si $\frac{d^4y'}{dx'^4} = 0$, il faudra qu'on ait $\frac{d^5y'}{dx'^5} = 0$, et ainsi de suite.

CHAPITRE IX.

POINTS SINGULIERS.

246. Lorsque la concavité se change en convexité, $\frac{d^2y}{dx^2}$ doit changer de signe et, par conséquent, passer par zéro ou l'infini; les points où s'opère ce changement se nomment *points d'inflexion*.

Mais il ne suffit pas que $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit nul pour qu'il y ait inflexion; car il faut, pour qu'il change de signe, que $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne soit pas nul, ou que $\frac{d^4y}{dx^4}$ le soit en même temps, et ainsi de suite. De même, si $\frac{d^2y}{dx^2}$ est infini, il faudra s'assurer s'il change de signe.

Points multiples. — On appelle ainsi ceux où passent plusieurs branches de courbe, et où l'on peut mener, par conséquent, plusieurs tangentes. On peut les déterminer par des règles très-simples pour toutes les courbes algébriques. Soit $F(x, y) = 0$ une équation algébrique et rationnelle; on en tirera

$$(1) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Or, cette équation devant être satisfaite par plusieurs valeurs de $\frac{dy}{dx}$, tandis que $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ n'en auraient qu'une seule, on devra avoir $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, conjointement avec

$F(x, y) = 0$. Si l'on trouve des solutions réelles communes à ces équations, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ seront données par l'équation

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

que l'on obtient en différentiant l'équation (1), et remplaçant ensuite $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dy}$ par zéro.

Si trois branches passaient au même point, les coefficients de cette équation seraient encore nuls, et l'on aurait recours à la troisième dérivée de l'équation; et ainsi de suite.

Les deux branches seraient tangentes si deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ étaient égales.

Si l'équation était résolue par rapport à y et renfermait des radicaux à double signe, on reconnaîtrait les points multiples en cherchant les valeurs de x qui font disparaître un de ces radicaux de y, sans le faire disparaître de $\frac{dy}{dx}$; car en ces points deux branches de courbe se couperont, et leurs tangentes seront différentes.

247. *Points de rebroussement.* — Si en un point multiple deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales, et que les deux branches s'arrêtent en ce point, on a un point de rebroussement. Il est du premier genre lorsque les deux branches sont de côtés différents de la tangente commune, et du second genre lorsqu'elles sont du même côté. On reconnaîtra que les branches s'arrêtent en ce point, lorsqu'en faisant varier x d'un côté seulement, leurs ordonnées deviendront imaginaires. Il faut cependant excepter

le cas où $\frac{dy}{dx}$ serait infini en ce point; on considérerait alors l'abscisse au lieu de l'ordonnée.

Le rebroussement sera du premier genre lorsque $\frac{d^2y}{dx^2}$ sera de signe différent pour les deux branches; il sera du second quand ce signe sera le même.

284. *Points conjugués.* — On appelle ainsi des points isolés dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe, sans qu'on en puisse supprimer ces solutions. Pour ces points, le Δy doit être imaginaire, et, par suite, le plus souvent le $\frac{dy}{dx}$. Dans ce cas, comme le $\frac{dy}{dx}$, tiré d'une équation du premier degré, ne saurait être imaginaire, les coordonnées des points conjugués satisferont aux équations $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$.

On les trouvera ainsi en même temps que les points multiples. Mais Δy peut être imaginaire sans que la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ le soit, parce que sa partie imaginaire pourrait avoir pour limite zéro.

249. *Points d'arrêt.* — On donne ce nom à tout point où s'arrête brusquement un branche unique de courbure.

On les déterminera en cherchant les valeurs de x à partir desquelles y commence à devenir imaginaire, s'il était réel auparavant; ou à devenir réel, s'il était imaginaire. Il faudra, de plus, s'assurer qu'il n'y a qu'une seule branche de la courbe à passer en ce point, et que, par conséquent, les valeurs voisines de x ne donnent pas plusieurs valeurs voisines pour y.

250. *Points saillants ou anguleux.* — On appelle ainsi les points où s'arrêtent deux branches de courbe,

sans y avoir la même tangente. Ils rentrent dans la classe des points multiples. On les distinguera des points multiples ordinaires, à ce que, comme dans le cas des points de rebroussement, les deux branches ne se prolongent pas au delà de leur point de rencontre.

Lorsque l'équation d'une courbe ne donne qu'une seule valeur de y pour chaque valeur de x, toute valeur de x qui donnera deux valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ déterminera évidemment un point saillant.

Exemples de points singuliers.

1°. $$a^2y^2 = a^2x^2 + x^4,$$

point multiple, inflexion.

2°. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tang} x$, $y = \frac{\operatorname{tang} x}{x}$, $y = x \operatorname{tang} x$,

inflexions.

3°. $$y = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{2p+1}{2q}} F(x),$$

rebroussement du premier genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} < 2 \quad \text{et} \quad > 1;$$

rebroussement du second genre, si l'on a

$$\frac{2p+1}{2q} > 2,$$

en supposant qu'on n'ait pas

$$\varphi''(x) = 0.$$

Cas particuliers de cette formule.

$$y^2 = x^3, \quad y = x \pm x\sqrt{x}, \quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x},$$

4°. $$y = \frac{1}{\log x}, \quad y = x \log x,$$

point d'arrêt à l'origine;

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

point saillant ou anguleux, à l'origine;

$$y = (x - a)\sqrt{x - b},$$

point conjugué, ayant pour abscisse a, si $a < b$; point multiple, ayant pour abscisse a, si $a > b$.

CHAPITRE X.

EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE DU RAYON DE COURBURE. COURBES OSCULATRICES EN GÉNÉRAL. CONTACTS DE DIVERS ORDRES.

251. La courbure en un point d'une courbe étant la limite du rapport de l'*angle des tangentes extrêmes* à l'arc correspondant, aura pour valeur

$$\lim. \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{ds},$$

φ désignant l'angle de la tangente avec l'axe des x; et si l'on appelle R le rayon de courbure qui est aussi le rayon du cercle osculateur, nous avons vu que $\frac{1}{R}$ est la mesure de la courbure; on aura donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi},$$

et, d'après les formules des n°s 242, 243, on aura dans un système de coordonnées rectangles

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

et dans un système de coordonnées polaires,

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Les réciproques des valeurs de R seraient celles de la courbure.

Si l'on prenait pour variable indépendante une quantité quelconque t différente de l'abscisse, on déduirait l'équation suivante des formules générales par lesquelles on opère cette transformation :

$$R = \frac{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \quad \text{ou} \quad R = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

On aurait pu passer aussi à la valeur de R exprimée en coordonnées polaires, en partant des coordonnées rectangulaires. On aurait trouvé la formule obtenue ci-dessus d'une manière directe.

Appliquons cette transformation au cas où la courbe serait donnée par une équation entre l'ordonnée et l'arc, et prenons l'arc pour variable indépendante; on a

$$R = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Il serait, du reste, très-facile de trouver directement cette dernière formule. On déterminerait l'angle de con-

tingence $d\varphi$, en partant de la formule $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, d'où

$$\frac{d^2y}{ds^2}\,ds = \cos\varphi\,d\varphi = d\varphi\sqrt{1-\frac{dy^2}{ds^2}};$$

donc

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{1-\frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

formule qui coïncide avec celle que l'on avait obtenue par le changement de la variable indépendante.

Courbes osculatrices.

252. Si l'on considère, au lieu d'un cercle, une courbe représentée par une équation donnée de forme, et contenant un certain nombre de coefficients indéterminés, on pourra lui donner autant de points communs avec la courbe proposée, qu'il y a de ces coefficients. Si l'on fait ensuite tendre tous ces points vers le premier, la limite vers laquelle tend la courbe variable se nomme la *courbe osculatrice* de la proposée, relativement à celles qui sont renfermées dans l'équation indéterminée.

Ces conditions géométriques peuvent être exprimées par des relations très-simples entre les coefficients différentiels successifs des ordonnées des deux courbes : soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ les abscisses de m points communs à deux courbes, croissant par degrés inégaux suivant une loi quelconque; on supposera, pour mettre le plus de généralité possible dans la question, que l'on prenne pour variable indépendante une quantité quelconque t, dont x, et par suite y, seront des fonctions connues.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ les valeurs de y relatives aux points communs; les différences successives de y_1 jusqu'à l'ordre $m-1$ peuvent s'exprimer, comme on le sait, au

moyen des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et il est évident qu'elles seront les mêmes pour les deux courbes, puisque les ordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont les mêmes. Les rapports $\frac{\Delta y_1}{\Delta t}, \frac{\Delta^2 y_1}{\Delta t^2}, \ldots, \frac{\Delta^{m-1} y_1}{\Delta t^{m-1}}$ seront donc identiquement les mêmes de part et d'autre, et, par suite, leurs limites seront aussi les mêmes.

Les $m-1$ premières dérivées de y par rapport à t auront donc les mêmes valeurs au point commun, dans les deux courbes, et il en sera de même de

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}.$$

Or on sait, d'après les formules relatives au changement de la variable indépendante, que les valeurs de

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

ne dépendent que des dérivées de x et de y par rapport à t, depuis le premier ordre jusqu'à celui que l'on considère, inclusivement.

Donc, quelle que soit la loi continue suivant laquelle les points communs se rapprochent du premier, la courbe limite sera telle, que pour $x = x_1$ les quantités

$$y_1, \quad \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \quad \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$$

auront la même valeur, si on les tire de son équation ou de l'équation de la courbe donnée.

Donc, pour déterminer les m coefficients de l'équation de la courbe osculatrice, il suffira d'égaler les valeurs des m quantités $y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}$, que l'on tirera des équations des deux courbes, et dans lesquelles on donnera à x

et y les valeurs x_1, y_1 du point que l'on a choisi sur la première courbe.

Mais on formera plus simplement ces m équations en différentiant $m-1$ fois l'équation qu'il faut déterminer, et remplaçant dans celle-ci et dans ses $m-1$ dérivées, x et y par x_1, y_1, et les dérivées de y par celles qu'on tirera de l'équation connue.

Telle est la méthode générale au moyen de laquelle on trouve l'équation de la courbe osculatrice d'une espèce donnée.

Contacts de divers ordres.

253. Lorsque deux courbes ont un point commun, et que l'on augmente l'abscisse de ce point d'une quantité infiniment petite, la différence des ordonnées est généralement du premier ordre.

Si cette différence est du deuxième ordre, on dit que les courbes ont un contact du premier ordre; si elle est du troisième ordre, on dit que le contact est du second; et, en général, il y a un contact du $n^{ième}$ ordre entre deux courbes, lorsque la différence de leurs ordonnées, à partir du point commun, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$: d'où il suit qu'entre deux courbes qui ont un contact d'un certain ordre, il est impossible qu'il en passe une autre dans le voisinage du point commun, si son contact avec l'une quelconque des deux est d'un ordre inférieur.

Pour qu'il n'y ait rien d'incertain dans cette définition des contacts de différents ordres, il est nécessaire de démontrer que l'ordre du contact est indépendant de la direction des axes; or c'est ce que l'on établit facilement en prouvant que, pour un point quelconque de l'une des courbes, les différences des ordonnées des deux courbes considérées relativement à des axes différents sont dans un rapport fini. Cette différence est la plus petite possible

quand les ordonnées sont perpendiculaires à la tangente au point commun.

La seule direction qu'on doive excepter pour les ordonnées est celle de la tangente au point commun.

Maintenant, si l'on développe en séries les ordonnées des deux courbes suivant les puissances de l'accroissement de l'abscisse du point commun, on reconnaît immédiatement que le contact entre ses courbes sera de l'ordre n, si les n premières dérivées de l'ordonnée par rapport à l'abscisse sont respectivement égales pour chacune des courbes, quand on y substitue l'abscisse du point commun : car, dans ce cas, la différence des ordonnées exprimée au moyen des deux termes qui complètent respectivement les deux séries, est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

C'est là le caractère analytique auquel on reconnaît l'ordre du contact de deux lignes qui ont un point commun.

Autre manière d'envisager les courbes osculatrices.

254. Il résulte de ce qui vient d'être dit sur le contact des courbes, que pour avoir la courbe d'une espèce donnée, qui a le contact de l'ordre le plus élevé avec une courbe dont l'équation est connue, il suffit de déterminer les coefficients arbitraires de l'équation générale des courbes dont l'espèce est donnée, en exprimant que, pour l'abscisse que l'on considère, les ordonnées sont respectivement égales, ainsi que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre le plus élevé possible. On établira ainsi autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés. L'ordre du contact sera le nombre de ces équations, moins une.

On voit par là que la courbe *osculatrice* et la courbe qui a le contact de l'ordre le plus élevé sont identiques.

Pour la ligne droite, dont l'équation n'a que deux coefficients arbitraires, le contact ne sera, en général, que du premier ordre; il sera du deuxième pour le cercle. Mais il pourra arriver qu'en certains points particuliers le contact soit d'un ordre plus élevé.

Lorsque l'équation de la courbe osculatrice cherchée n'est pas résolue par rapport à y, on forme ses équations différentielles successives et l'on y substitue à y', $\frac{dy'}{dx'}$, etc., les valeurs tirées de l'équation de la courbe donnée. Les seules inconnues sont alors les coefficients; et s'ils entrent tous au premier degré, on trouvera un seul système de valeurs, et, par conséquent, une seule courbe osculatrice.

Lorsque le nombre des dérivées communes est pair, la différence est d'un ordre impair, et, par conséquent, change de signe avec l'accroissement de x' : donc alors les courbes se coupent. C'est ce qui arrive, en général, pour le cercle osculateur.

Si, au contraire, le nombre des dérivées communes est impair, la différence est d'ordre pair et ne change pas de signe avec l'accroissement de x' : les lignes ne se coupent donc pas. C'est ce qui a lieu dans le cas de la ligne droite, excepté aux points d'inflexion.

255. Les courbes les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée sont celles qui sont renfermées dans l'équation

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m.$$

On peut établir un contact de l'ordre $m-1$ entre les deux courbes, et l'on aura immédiatement l'équation de la courbe osculatrice en développant son ordonnée par la formule de Taylor, après avoir remplacé x par $x' + (x - x')$. Cette équation est la suivante, dans laquelle les dérivées de y' sont remplacées par celles que donne l'équation de

la courbe connue,

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x') + \frac{d^2y'}{dx'^2}\frac{(x-x')^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^my'}{dx'^m}\frac{(x-x')^m}{1.2.3\ldots m};$$

si $m = 1$, on a la droite oscularice dont l'équation est

$$y = y' + \frac{dy'}{dx'}(x - x').$$

256. *Cercle osculateur.* — L'équation générale du cercle est

$$(x - \alpha)^2 + (y - 6)^2 = R^2,$$

α, 6 étant les coordonnées du centre, et R le rayon. D'après les théories précédentes, on déterminera les constantes α, 6, R, relatives au cercle osculateur au point x', y' d'une courbe donnée, au moyen des trois équations

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - 6)^2 = R^2,$$

$$(x' - \alpha) + (y' - 6)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - 6)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0;$$

$\frac{dy'}{dx'}$ et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ étant tirés de l'équation de la courbe donnée. La seconde de ces équations montre que le centre du cercle osculateur est situé sur la normale.

On tirera de là

$$y' - 6 = -\frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}, \quad x' - \alpha = \frac{dy'}{dx'}\frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, substituant dans la première,

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Cette équation donne pour le rayon la valeur déjà trouvée par une autre voie; et les deux précédentes font connaître les coordonnées α, β du centre de courbure, en fonction de x', y'.

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x', y', l'équation résultante entre α et β représentera le lieu des centres de courbure, ou la *développée* de la première.

CHAPITRE XI.

THÉORIE ANALYTIQUE DES DÉVELOPPÉES. COURBES ENVELOPPES.

257. Les équations qui déterminent les coordonnées α, β du centre de courbure, ou du point de la *développée*, correspondant au point (x', y') de la courbe donnée, sont, d'après le numéro précédent,

$$(1) \qquad (x' - \alpha) + (y' - \beta)\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \beta)\frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

Ces équations ayant lieu quel que soit le point que l'on considère, si l'on donne à x' un accroissement infiniment petit, y', α, β, qui sont des fonctions de x', en recevront de correspondants, et les équations (1) et (2) seront encore satisfaites; les accroissements de leurs premiers membres seront donc nuls, et, par suite, leurs dérivées par rapport à x'.

Or l'équation (1), différentiée en considérant α, β, y' comme fonctions de x', et ayant égard à l'équation (2), donne

$$-\frac{d\alpha}{dx'} - \frac{d\beta}{dx'}\frac{dy'}{dx'} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où il résulte, comme nous l'avions déjà démontré, que *la normale à la courbe donnée est tangente à sa développée, au centre de courbure.*

258. Le calcul peut encore conduire à la seconde propriété, qui consiste en ce que la différence de deux rayons de courbure d'une courbe est égal à l'arc correspondant de sa développée : il suffit, pour cela, de parvenir à une équation qui ne renferme que dR, $d\alpha$, $d\beta$.

Or, si l'on différentie l'équation

$$(3) \qquad (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=R^2,$$

on trouvera, en ayant égard à l'équation (1),

$$-(x'-\alpha)\frac{d\alpha}{dx'}-(y'-\beta)\frac{d\beta}{dx'}=R\frac{dR}{dx'}:$$

et si l'on remet pour $x'-\alpha$ sa valeur tirée de (1), il vient

$$(y'-\beta)\left(\frac{dy'}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'}-\frac{d\beta}{dx'}\right)=R\frac{dR}{dx'},$$

et, remplaçant $\frac{dy'}{dx'}$ par $-\frac{d\alpha}{d\beta}$,

$$-(y'-\beta)\left(\frac{d\alpha^2+d\beta^2}{d\beta\,dx'}\right)=R\frac{dR}{dx'}.$$

Pour éliminer $y'-\beta$, on remarquera que les équations (1) et (3) donnent

$$R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}},\quad \text{ou}\quad R=(y'-\beta)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}},$$

d'où

$$y'-\beta=\frac{R\,d\beta}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}}.$$

Reportant cette valeur de $y'-\beta$ dans l'équation ci-dessus, il vient, abstraction faite du signe du radical,

$$dR=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2},$$

ce qui démontre que la différentielle du rayon de cour-

bure est égale à celle de l'arc de la développée. D'où l'on conclut qu'un arc quelconque de la développée est égal à la différence des rayons de courbure tangents à ses extrémités. La description de la première courbe d'un mouvement continu, par le développement de la seconde, en résulte, comme nous l'avions fait voir précédemment.

259. Si l'on donnait l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$ de la développée, et qu'on demandât celle de la développante, il faudrait éliminer α et β entre l'équation donnée et les deux suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta}, \quad x - \alpha - (y - \beta)\frac{d\alpha}{d\beta} = 0,$$

dans lesquelles $\frac{d\alpha}{d\beta}$ serait donnée en fonction de α et β au moyen de l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$. Il en résulterait une équation entre $x, y, \frac{dy}{dx}$, et, au moyen du calcul intégral, on trouverait l'équation finie entre x et y.

Les coordonnées x, y d'un point quelconque de la développante peuvent facilement s'exprimer au moyen des coordonnées α, β et de l'arc s de la développée.

Une construction très-simple conduit immédiatement aux équations

$$\alpha - x = s\frac{d\alpha}{ds}, \quad \beta - y = s\frac{d\beta}{ds}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha - x}{\beta - y} = \frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Si l'on en fait application au cas du cercle, dont l'équation est $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$, on trouve d'abord

$$\alpha x + \beta y = a^2, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{a}x + \frac{\beta}{a}y = a,$$

équation qui donnerait immédiatement la projection de

x et y sur le rayon a mené au point de contact. Mais

$$\frac{x}{a} = \cos\frac{s}{a}, \quad \frac{y}{a} = \sin\frac{s}{a} \quad \text{et} \quad s = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

L'équation de la développante du cercle sera donc

$$x \cos\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} + y \sin\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = a$$

et en coordonnées polaires

$$\theta = \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2} - \text{arc}\cos\frac{a}{r},$$

comme la figure le donnerait immédiatement.

Courbes enveloppes.

260. Nous avons vu (n° 154) que si l'on considère la courbe représentée par une équation $F(x, y, a) = 0$, qu'on cherche la limite des points de rencontre de cette courbe avec celles qui résulteraient d'un accroissement infiniment petit donné à a; et que l'on cherche le lieu de ces points limites sur toutes les courbes représentées par l'équation proposée, dans laquelle a varierait d'une manière continue, il suffit, pour obtenir ce lieu, d'*éliminer la constante a entre l'équation de la courbe variable et sa dérivée partielle par rapport à cette constante.*

Nous avons fait remarquer que les raisonnements qui ont conduit à cette règle supposent que la fonction $F(x, y, a)$ n'ait qu'une seule valeur, pour un même système de valeurs de x, y, a; car, sans cela, il serait possible qu'on dût prendre deux des formes différentes de cette fonction dans les équations des deux courbes voisines. Dans ce cas, on ne pourrait supprimer $F(x, y, a)$ dans la seconde, et les valeurs limites de x, y seraient

celles qui rendraient égales les deux valeurs de cette fonction.

La propriété remarquable qu'a cette courbe d'être tangente à toutes les positions successives de la courbe variable, et que nous avons démontrée géométriquement, peut être établie comme il suit par le calcul.

En effet, si de l'équation $\frac{dF}{da} = 0$ on tire $a = \varphi(x, y)$, et qu'on substitue cette valeur dans $F(x, y, a) = 0$, on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$(1) \qquad F[x, y, \varphi(x, y)] = 0.$$

Soit l'équation d'une quelconque des courbes variables

$$(2) \qquad F(x, y, a) = 0.$$

Ces deux courbes (1) et (2) ont généralement des points communs, d'après la génération de la première; or il est facile de démontrer qu'en ces points la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même d'après les deux équations.

En effet, l'équation (1) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais $\frac{dF}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{dF}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x, y)$ y remplace a, et $\varphi(x, y)$ est précisément la valeur de a qui rend nul $\frac{dF}{da}$; donc $\frac{dF}{d\varphi}$ est identiquement nul; et il reste pour déterminer $\frac{dy}{dx}$, d'après l'équation (1),

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Maintenant l'équation (2) différentiée donne

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que a y remplace $\varphi(x, y)$. Mais pour le point commun aux deux courbes, on a $a = \varphi(x, y)$, puisque cette équation n'est autre que $\frac{dF}{da} = 0$: donc, en ce point, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même pour les courbes; donc enfin la courbe variable est constamment tangente à la courbe fixe qui est le lieu de ses intersections successives, et c'est pour cela qu'on a donné à cette dernière le nom de *courbe enveloppe*.

Néanmoins il ne faut pas croire que la courbe enveloppe soit nécessairement tangente à toutes les courbes variables; cela n'a lieu que pour celles qui sont coupées par les courbes infiniment voisines, et les raisonnements précédents ne s'appliquent qu'à celles-là. Or il peut arriver que ce ne soit qu'entre certaines limites de la constante que cette intersection ait lieu. Il est donc plus exact de définir la courbe enveloppe par la propriété d'être le lieu des intersections successives des courbes variables, que par celle d'être tangente à ces courbes dans toutes leurs positions.

261. Si l'on prend pour la ligne variable la normale à une courbe donnée, l'enveloppe sera le lieu des centres de courbure, puisqu'on a démontré qu'ils sont les limites des rencontres des normales infiniment voisines. En appliquant à cette question la théorie qui vient d'être exposée, il est facile de voir que le calcul conduit à la développée. En effet, l'équation d'une normale quelconque est

$$y - y' = -\frac{1}{\left(\frac{dy'}{dx'}\right)}(x - x');$$

y' est une fonction connue de x', et x' remplace ici la constante a. Différentiant cette équation par rapport à x', il vient

$$-\frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{d^2y'}{dx'^2}}{\frac{dy'^2}{dx'^2}}(x - x') + \frac{1}{\frac{dy'}{dx'}};$$

d'où

$$x - x' = -\frac{\frac{dy'}{dx'}\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}},$$

et, par suite,

$$y - y' = \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Ces valeurs de x et y sont précisément celles de α et β du n° 256. Pour obtenir l'équation de la courbe enveloppe, il faudrait éliminer x' entre ces deux équations, après avoir préalablement remplacé y' en fonction de x' : ce qui revient à éliminer x', y' entre ces deux équations et celle de la courbe donnée. Ce calcul n'est autre que celui qui est indiqué n° 256 pour obtenir l'équation de la développée.

Applications des théories précédentes.

262. *Parabole.* — Soit $x^2 = 2py$; on en tire

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

La valeur du rayon de courbure sera

$$R = p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure seront données

par les équations

$$y - \beta = -p\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right)$$

et

$$x - \alpha = x\left(1 + \frac{x^2}{p^2}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{x^3}{p^2}.$$

Éliminant x et y entre ces deux équations et celle de la parabole, on trouve, pour équation de la développée,

$$\beta - p = \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe a un rebroussement du premier genre au point pour lequel $\alpha = 0$.

Ellipse. — L'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Or, en désignant toujours par N la longueur de la normale, on a

$$N = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2};$$

donc

$$R = \frac{a^2N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2}.$$

p désignant le demi-paramètre.

On trouverait la même formule pour l'hyperbole et la parabole. Les coordonnées du centre de courbure seront données par les équations

$$y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}, \quad x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{b^2a^4}.$$

Si, au moyen de l'équation de l'ellipse, on élimine x de la première, et y de la seconde, on trouve, en posant

$a^2 - b^2 = c^2$,

$$y^3 = -\frac{b^4 \beta}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4 \alpha}{c^2},$$

ou

$$y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \beta^{\frac{1}{3}}, \quad x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} \alpha^{\frac{1}{3}};$$

et, substituant dans l'équation de l'ellipse, on a, pour l'équation de la développée,

$$b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}};$$

l'équation de la développée de l'hyperbole serait

$$b^{\frac{2}{3}} \beta^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}}.$$

Elle se déduirait de celle de l'ellipse en y changeant b^2 en $-b^2$

Cycloïde. — L'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2},$$

et, par suite,

$$R = 2\sqrt{2ay} = 2N,$$

N désignant la normale; d'où l'on conclurait, comme précédemment, que la développée d'une cycloïde se compose de deux demi-cycloïdes identiques à la première.

On peut déterminer l'aire de la cycloïde en la considérant comme la somme des parties comprises entre les rayons de courbure consécutifs.

Soient QH, PK (*fig* 62) deux rayons infiniment voisins, S leur point de concours, et PR parallèle à AA'; le rapport des triangles semblables SLF, SRP est $\frac{SF^2}{SP^2}$, dont

la limite est $\frac{1}{4}$; de plus, QRP est infiniment petit par rapport à ces triangles, ainsi que l'aire HSK. Donc la limite de la somme des aires LFPR, depuis A′ jusqu'à A, est l'aire comprise entre la cycloïde AEA′ et sa base; et la limite de la somme des triangles SLF est l'aire comprise entre AA′ et les arcs AB, A′B : cette aire ajoutée à la première forme le rectangle construit sur AA′ et $2a$. D'ailleurs le rapport de LFPR à SLF a pour limite 3, puisque le rapport de SPR à SFL a pour limite 4. Donc l'aire de la cycloïde AEA′ est les trois quarts du rectangle qui a pour base $2\pi a$ et pour hauteur $2a$, et dont l'aire est, par conséquent, $4\pi a^2$.

L'aire de la cycloïde est donc $3\pi a^2$, ou trois fois celle du cercle générateur.

Spirale logarithmique. — Son équation $r = ae^{m\theta}$ donne, comme on l'a vu ci-dessus,

$$\frac{dr}{d\theta} = mae^{m\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2 ae^{m\theta},$$

$$N = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2} = MO, \text{ (fig. 91) } S_n = mae^{m\theta} = AO.$$

On trouvera, pour le rayon de courbure,

$$R = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2}, \quad \text{ou} \quad R = MO.$$

Le centre de courbure est donc à la rencontre de la normale avec la perpendiculaire menée par le pôle au rayon vecteur.

Si l'on pose

$$OAX = \theta', \quad AO = r',$$

l'équation polaire de la développée sera, d'après ce qui précède,

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

On peut lui donner la même forme qu'à la proposée, en comptant les angles à partir d'une droite faisant avec AX un angle α tel, que l'on ait

$$me^{m\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=1;$$

l'équation précédente devient alors

$$r'=ae^{m\theta}.$$

La développée d'une spirale logarithmique est donc une spirale identique, et qui coïnciderait avec elle, si on la faisait tourner autour du pôle, d'une quantité angulaire α égale à $\frac{\pi}{2}-\frac{lm}{m}$.

La différence des deux rayons de courbure MO, M′O′ étant égale à l'arc OO′ de la développée, il s'ensuit que si le point M′ tend indéfiniment vers le pôle, ainsi que O′, l'arc OO′ se rapprochera indéfiniment d'être égal à MO.

Ainsi la longueur totale de l'arc d'une spirale logarithmique compris entre un point quelconque O et le pôle asymptote, est égale à la tangente OM terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur AO, menée par le pôle

CHAPITRE XII.

TANGENTES, ET PLANS NORMAUX AUX COURBES A DOUBLE COURBURE. PLANS TANGENTS, ET NORMALES AUX SURFACES COURBES.

263. Une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan est dite à *double courbure*. La tangente en un quelconque de ses points, est la limite vers laquelle tend une sécante qui passe par ce point et par un autre appartenant aussi à la courbe, et qui se rapproche indéfiniment du premier.

On appelle *longueur d'un arc* la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit, lorsque ses côtés tendent tous vers zéro. Cette limite est indépendante du mode de division de l'arc, parce que les rapports des éléments correspondants de ces polygones, compris entre des plans parallèles infiniment voisins, ont pour limite l'unité.

On pourra donc encore prendre la corde ou la tangente au lieu de l'arc infiniment petit, et la différentielle ds de l'arc d'une courbe à double courbure aura pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

les axes de coordonnées étant supposés rectangulaires.

264. Une sécante passant par les points de la courbe ayant pour coordonnées

$$x, y, z, \quad \text{et} \quad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\Delta x}{\Delta s},\quad \frac{\Delta y}{\Delta s},\quad \frac{\Delta z}{\Delta s},$$

en regardant Δs comme égal à sa corde, ce qui ne change pas les limites. Leurs signes apprennent si la droite dirigée du premier point vers le second, fait avec les axes des angles aigus ou obtus.

Les limites de ces expressions, ou $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sont les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes.

265. Les équations de la sécante passant par le point x', y', z' de la courbe et un autre point infiniment voisin, sont

$$x - x' = \frac{\Delta x'}{\Delta z'}(z - z'),\quad y - y' = \frac{\Delta y'}{\Delta z'}(z - z').$$

Donc les équations de la tangente seront, en prenant ces rapports différentiels à leurs limites,

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'),\quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

Si la courbe est déterminée par les équations de ses projections sur les plans XZ, YZ, on tirera $\frac{dx'}{dz'}$ et $\frac{dy}{dz'}$ de chacune d'elles.

Si elle est donnée par deux équations à trois variables

$$F(x, y, z) = 0,\quad f(x, y, z) = 0,$$

on en déduira

$$\frac{dF}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{dF}{dz'} = 0,\quad \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dz'} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dz'} + \frac{df}{dz'} = 0,$$

et il faudra tirer de ces deux équations les valeurs de $\frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}$, pour les reporter dans les précédentes, on éli-

miner de toute autre manière $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$, entre les quatre équations; on obtient ainsi, pour les équations de la tangente,

$$\frac{dF}{dx'}(x-x')+\frac{dF}{dy'}(y-y')+\frac{dF}{dz'}(z-z')=0,$$

$$\frac{df}{dx'}(x-x')+\frac{df}{dy'}(y-y')+\frac{df}{dz'}(z-z')=0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne sont autre chose que celles des plans tangents aux surfaces représentées par les deux équations données, et dont la courbe donnée est l'intersection.

266. On appelle *plan normal* celui qui est perpendiculaire à la tangente, au point de contact. Son équation sera, d'après celles que nous avons données d'abord pour la tangente,

$$z-z'+\frac{dx'}{dz'}(x-x')+\frac{dy'}{dz'}(y-y')=0,$$

ou

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

On pourrait parvenir à cette même équation en cherchant le lieu des droites menées par le point x', y', z', perpendiculairement à la tangente. Soient, en effet, x, y, z les coordonnées d'un point quelconque d'une de ces droites, les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes sont proportionnels aux quantités $x-x', y-y', z-z'$; ceux qui se rapportent à la tangente sont proportionnels à dx', dy', dz' : or, pour que ces deux directions soient perpendiculaires, il faut que le cosinus de leur angle soit nul; d'où résulte, pour tous les points du lieu,

$$(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'=0.$$

267. On peut encore obtenir l'équation du plan normal en le considérant comme la limite du plan qui ren-

ferme les points communs à deux sphères égales ayant leurs centres en deux points de la courbe, infiniment voisins.

Soient x', y', z' les coordonnées du premier point, $x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z'$ celles du second, et R le rayon des sphères; l'équation de la première est

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2;$$

celle de la seconde est

$$(x - x' - \Delta x')^2 + (y - y' - \Delta y')^2 + (z - z' - \Delta z')^2 = R^2.$$

Elles ont lieu en même temps pour les points communs, et si on les soustrait l'une de l'autre, on trouve, en négligeant les infiniment petits du second ordre et substituant les différentielles aux différences,

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0.$$

Cette équation étant du premier degré est celle du plan qui contient le cercle d'intersection des sphères, pris à sa limite, ou du plan normal.

Toute ligne située dans le plan normal est dite *normale* à la courbe.

Tout plan passant par la tangente est nommé *plan tangent* à la courbe.

Plans tangents, plans normaux, et normales aux surfaces courbes.

268. *Plan tangent.* — Une tangente à une surface est la limite vers laquelle tend une sécante menée par un point de cette surface, lorsqu'un second point d'intersection tend vers le premier.

Ce second point pouvant tendre d'une infinité de manières vers le premier, il y a une infinité de tangentes à la surface en ce point. Nous allons démontrer que le lieu

de toutes ces tangentes est un plan, et nous lui donnerons le nom de *plan tangent*.

Pour déterminer, en général, le lieu de ces tangentes, soit

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{ou} \quad z = f(x, y)$$

l'équation de la surface.

Les équations d'une tangente quelconque au point x', y', z' seront

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z');$$

les quantités $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ sont indéterminées, mais liées entre elles par l'équation

$$1 = p\frac{dx'}{dz'} + q\frac{dy'}{dz'},$$

dans laquelle p et q représentent les dérivées partielles $\left(\frac{dz'}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dz'}{dy'}\right)$, tirées de l'équation $z = f(x, y)$.

Si l'on élimine $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ entre les trois équations précédentes, on aura l'équation du lieu de toutes les tangentes. On trouve ainsi

$$1 = p\frac{(x - x')}{z - z'} + q\frac{(y - y')}{z - z'},$$

ou

$$z - z' = p(x - x') + q(y - y'),$$

ou

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

$\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ désignant les dérivées partielles de la fonction de x et y qui exprime la valeur de z. Cette équation étant

du premier degré par rapport à x, y, z, il s'ensuit que le lieu des tangentes est un plan.

L'équation du plan tangent prend une autre forme quand l'équation de la surface est de la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

et non résolue par rapport à z.

On déterminera $\frac{dz'}{dx'}$ et $\frac{dz'}{dy'}$ par les équations

$$\frac{dF}{dx'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dx'} = 0, \quad \frac{dF}{dy'} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{dy'} = 0,$$

et l'équation du plan tangent sera

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

269. *Normale.* — La normale est la perpendiculaire au plan tangent, menée au point de contact; ses équations seront donc

$$x - x' = -\frac{dz'}{dx'}(z - z'), \quad y - y' = -\frac{dz'}{dy'}(z - z'),$$

ou

$$(x - x')\frac{dF}{dz'} = (z - z')\frac{dF}{dx'}, \quad (y - y')\frac{dF}{dz'} = (z - z')\frac{dF}{dy'}.$$

Plan normal. — Si, au point de contact d'une tangente à une surface, on mène un plan perpendiculaire à cette ligne, on aura un *plan normal* à la surface. On trouvera son équation, soit en partant des équations d'une tangente, soit par l'intersection de deux sphères égales dont les centres se rapprochent indéfiniment. De cette manière on aura pour l'équation d'un plan normal quelconque au point x', y', z',

$$(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz' = 0.$$

Elle est indéterminée parce que les différentielles dx',

dy', dz' ne sont assujetties qu'à la condition

$$dz' = pdx' + qdy' = \frac{dz'}{dx'}dx' + \frac{dz'}{dy'}dy';$$

et si l'on substitue cette valeur de dz', on obtient

$$dx'\left[x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z')\right]$$
$$+ dy'\left[y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z')\right] = 0.$$

Cette équation changera avec le rapport que l'on établira entre dx', dy', et représentera tous les plans normaux au point donné.

De cette équation du plan normal on peut déduire celle de la normale, et, par suite, du plan tangent. En effet, on voit quelle est satisfaite, quel que soit le rapport de dy' à dx', si l'on pose les deux équations

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \quad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0.$$

Donc tous les plans normaux se coupent suivant une même droite, représentée par ces deux équations. Cette droite étant perpendiculaire à toutes les tangentes, ces dernières sont toutes dans un même plan, ayant pour équation

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

On trouve ainsi, indépendamment de la première méthode, les équations du plan tangent et de la normale.

Sur la distance des droites successives d'un système continu.

270. Si l'on considère une série de droites dont les

équations générales dépendent d'une constante dont la valeur puisse varier arbitrairement et d'une manière continue, la plus courte distance de deux de ces droites, correspondantes à des différences infiniment petites entre les constantes, peut être du même ordre que ces différences, ou d'un ordre différent.

L'objet que nous nous proposons ici est de déterminer avec plus de précision qu'on ne l'a fait jusqu'ici l'ordre infinitésimal de cette distance, et c'est ce que nous ferons au moyen d'une remarque curieuse due à M. Bouquet. Elle consiste en ce que, *si dans une série continue quelconque de droites, la distance de deux consécutives est généralement d'un ordre supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Soient, en effet,

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

les équations d'une droite quelconque de la série, a, b, α, β dépendant d'une certaine constante unique; Δa, Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ les accroissements des constantes, en passant à une droite infiniment voisine, faisant partie de la même série : la plus courte distance δ de ces deux droites sera, d'après une formule élémentaire connue,

$$\delta = \frac{\Delta a \Delta\beta - \Delta b \Delta\alpha}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}.$$

Or, on a

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{2.3} d^3 a + \ldots,$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{2.3} d^3 b + \ldots,$$

$$\Delta\alpha = d\alpha + \frac{1}{2} d^2 \alpha + \frac{1}{2.3} d^3 \alpha + \ldots,$$

$$\Delta\beta = d\beta + \frac{1}{2} d^2 \beta + \frac{1}{2.3} d^3 \beta + \ldots;$$

il en résulte

$$\Delta a \Delta \beta - \Delta b \Delta \alpha = (da d\beta - db d\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(da\, d^2\beta + d\beta\, d^2 a - db\, d^2\alpha - d\alpha\, d^2 b) + \ldots.$$

Or, si le premier terme $da d\beta - db d\alpha$ n'est pas nul, le denominateur de δ étant un infiniment petit du premier ordre, et son numérateur du second, δ sera du premier ordre. Si, au contraire, on a constamment

$$da d\beta - db d\alpha = 0,$$

le numérateur devient d'un ordre plus élevé de deux unités, parce que l'ensemble des termes du troisième ordre n'est autre chose que la moitié de la différentielle de $da d\beta - db d\alpha$, et cette dernière quantité étant constamment nulle, sa différentielle l'est aussi.

D'où résulte cette conséquence remarquable, que, *si la distance de deux droites consécutives, prises dans une série quelconque, est généralement d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Le théorème que nous venons de démontrer est soumis, comme presque tous les autres, à des exceptions très-particulières; il est fondé sur des développements généralement possibles, mais qui, pour certains points singuliers, pourraient devenir illusoires.

Application aux tangentes à une courbe.

271. Les équations d'une tangente quelconque sont

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z').$$

On a donc, dans ce cas,

$$a = \frac{dx'}{dz'}, \quad b = \frac{dy'}{dz'}, \quad \alpha = x' - z'\frac{dx'}{dz'}, \quad \beta = y' - z'\frac{dy'}{dz'}.$$

Nous prendrons z' pour la constante qui détermine la position de la droite, et dont x', y' sont des fonctions d'après les équations de la courbe.

Cela posé, on aura

$$\frac{da}{dz'} = \frac{d^2x'}{dz'^2}, \quad \frac{db}{dz'} = \frac{d^2y'}{dz'^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dz'} = -z'\frac{d^2x'}{dz'^2}, \quad \frac{d\beta}{dz'} = -z'\frac{d^2y'}{dz'^2},$$

et, par conséquent,

$$da\,d\beta - db\,d\alpha = 0.$$

Donc, en général, dans toute courbe à double courbure, la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est un infiniment petit du troisième ordre, si la distance des deux points de contact est du premier.

Application aux normales à une surface.

272. Les équations générales d'une normale sont

$$x - x' = -p(z - z'), \quad y - y' = -q(z - z'),$$

p et q désignant les dérivées partielles $\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$.

Si maintenant on conçoit une courbe quelconque sur la surface en établissant entre x', y', z' une seconde équation au moyen de laquelle ces trois coordonnées dépendront d'une seule d'entre elles, ou de toute autre variable indépendante, on peut se proposer de déterminer cette courbe de manière à ce que la plus courte distance de deux normales, correspondantes à des valeurs infiniment voisines de la constante, c'est-à-dire à deux points infiniment voisins de la courbe, soit un infiniment

petit du troisième ordre, la distance des deux points étant du premier.

Dans le cas actuel, on aura

$$a = -p, \quad b = -q, \quad \alpha = x' + pz', \quad \beta = y' + qz',$$

et l'équation $da\,d\beta - db\,d\alpha$ devient

$$(dy' + qdz')\,dp = (dx' + pdz')\,dq.$$

En remplaçant dz' par sa valeur $pdx' + qdy'$; et formant les différentielles dp, dq d'après les dérivées partielles $\frac{d^2z'}{dx'^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'\,dy'}$, $\frac{d^2z'}{dy'^2}$ que nous désignerons par r, s, t, cette équation devient

$$(sq^2 - pqt + s)\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]\frac{dy'}{dx'}$$
$$+ pqr - s(1+p^2) = 0.$$

Cette condition, jointe à celle de la surface, détermine les courbes jouissant de la propriété demandée, et que l'on nomme *lignes de courbure* de la surface. Nous reviendrons sur ce point quand nous aurons étudié les équations différentielles. Nous nous bornerons à remarquer que l'équation donnant deux valeurs pour $\frac{dy'}{dx'}$, il y a en chaque point de la surface deux directions jouissant de la propriété en question.

CHAPITRE XIII.

PLAN OSCULATEUR D'UNE COURBE. CERCLE OSCULATEUR. ANGLE DE CONTINGENCE. ANGLE DE TORSION. SURFACE POLAIRE. CENTRE DE LA SPHÈRE OSCULATRICE. CONTACTS DES COURBES A DOUBLE COURBURE. DÉVELOPPÉES DE CES COURBES. CONTACTS DES SURFACES.

---

273. *Plan osculateur.* — On appelle ainsi la limite vers laquelle tend le plan qui passe par trois points d'une courbe, qui tendent indéfiniment à se réduire à un seul. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$ celles d'un point infiniment voisin, et $x'+2\Delta x'+\Delta^2 x'$, $y'+2\Delta y'+\Delta^2 y'$, $z'+2\Delta z'+\Delta^2 z'$ celles d'un troisième point de la courbe, les différentielles étant déterminées d'après les accroissements égaux d'une variable quelconque, dont x', y', z' sont des fonctions déterminées.

Tout plan qui passe par le premier point a pour équation

$$z-z'=a(x-x')+b(y-y');$$

pour qu'il passe par les deux autres, on aura les conditions

$$\Delta z'=a\Delta x'+b\Delta y',$$
$$\Delta^2 z'=a\Delta^2 x'+b\Delta^2 y';$$

et pour le plan limite ces équations auront lieu entre les différentielles

$$dx',\quad dy',\quad dz',\quad d^2x',\quad d^2y',\quad d^2z'.$$

Digitized by Google

Les valeurs de a et b tirées de ces deux équations, et reportées dans celle du plan, donnent l'équation du plan osculateur, qui est

$$(x-x')(dy'd^2z'-dz'd^2y')+(y-y')(dz'd^2x'-dx'd^2z')$$
$$+(z-z')(dx'd^2y'-dy'd^2x')=0.$$

274. Si l'on cherchait la limite des plans passant par la tangente en un point d'une courbe, et par un autre de ses points tendant vers le premier, il est facile de voir qu'on retrouverait le plan osculateur.

En effet, les équations de la tangente sont

$$x-x'=\frac{dx'}{dz'}(z-z'),\quad y-y'=\frac{dy'}{dz'}(z-z'),$$

et le plan dont l'équation est

$$z-z'=a(x-x')+b(y-y')$$

contiendra cette tangente, si l'on a

$$1=a\frac{dx'}{dz'}+b\frac{dy'}{dz'},\quad \text{ou}\quad dz'=adx'+bdy',$$

ou, prenant t pour variable indépendante,

$$\frac{dz'}{dt}=a\frac{dx'}{dt}+b\frac{dy'}{dt}.$$

Pour que ce même plan passe par un point ayant pour coordonnées $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$, il faudra que l'on ait

$$\Delta z'=a\Delta x'+b\Delta dy'.$$

Mais on ne pourra, dans cette équation, négliger les termes du second ordre, parce que tous ceux du premier disparaissent, en vertu de l'équation précédente.

En effet, si l'on développe les différences, et qu'on se

borne au second ordre, on aura

$$\Delta z' = \frac{dz'}{dt}\Delta t + \frac{d^2z'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta y' = \frac{dy'}{dt}\Delta t + \frac{d^2y'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta x' = \frac{dx'}{dt}\Delta t + \frac{d^2x'}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, les termes qui renferment Δt au premier degré disparaissent, et il reste, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, et divisant par $\frac{\Delta t^2}{2}$,

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \text{ou} \quad d^2z' = ad^2x' + bd^2y'.$$

Les coefficients a et b sont donc déterminés par les mêmes équations que précédemment, et l'on trouve l'équation du plan osculateur.

On trouverait encore le même plan en cherchant la limite de celui qui passerait par une tangente et une parallèle à la tangente infiniment voisine.

275. *Angle de contingence.* — On appelle ainsi l'angle de deux tangentes infiniment voisines, ou, pour parler rigoureusement, la différentielle qui correspond à cet angle infiniment petit; c'est-à-dire une quantité dont le rapport à l'accroissement de la variable indépendante soit égal à la limite du rapport de l'angle des tangentes à ce même accroissement. Ces tangentes n'étant pas dans un même plan, leur angle est celui de deux droites qui passeraient par un même point et leur seraient parallèles. Soient a, b, c les cosinus des angles formés avec les axes par la première tangente, et $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$

ceux qui se rapportent à la seconde; le cosinus de l'angle ω de ces deux directions sera

$$\begin{aligned}\cos\omega &= a^2 + b^2 + c^2 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c \\ &= 1 + a\Delta a + b\Delta b + c\Delta c.\end{aligned}$$

De l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

on tire

$$2a\Delta a + 2b\Delta b + 2c\Delta c + \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 = 0;$$

donc

$$1 - \cos\omega = 2\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}{2}.$$

Si l'on remplace $\sin\omega$ par ω, et les différences par les différentielles, ω sera ce que nous avons appelé l'angle de contingence, et l'on aura

$$\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2, \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

On pourrait encore établir cette formule par des considérations géométriques.

Menant MB (*fig.* 92) parallèle à la seconde tangente, et prenant $MA = MB = 1$, on a

$$\text{arc } AB = \omega.$$

Projetant le triangle rectiligne MAB sur les trois axes, et appelant λ, μ, ν les angles de la direction AB avec les directions positives de ces axes, on pourra écrire

$$da = \omega\cos\lambda, \quad db = \omega\cos\mu, \quad dc = \omega\cos\nu,$$

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad \cos\lambda = \frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}, \quad \cos\nu = \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}}.$$

Cela fait connaître l'angle de contingence et les cosinus

des angles de la direction prise du point M vers le centre de courbure.

Or on a

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

d'où l'on tire

$$da = \frac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2}, \quad db = \frac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2},$$

$$dc = \frac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2};$$

substituant ces valeurs dans celle de ω, et observant qu'on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z,$$

on obtiendra

$$\omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

On peut faire disparaître d^2s de cette expression, en tirant sa valeur de l'équation précédente : on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

276. Si, au lieu de chercher l'angle de deux tangentes en des points M, M′ infiniment voisins (*fig.* 93), on cherchait l'angle de la corde MM′ avec la corde M′M″, en supposant les deux points M′M″ correspondants aux accroissements égaux d'une variable quelconque t, on trouverait la même expression pour l'angle TM′M″. En effet, les cosinus des angles de MT avec les axes sont les rapports $\frac{\Delta x}{MM'}$, $\frac{\Delta y}{MM'}$, $\frac{\Delta z}{MM'}$, et diffèrent de quantités infini-

ment petites, de leurs limites respectives $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$. Le changement de t en $t + dt$ donnera donc les mêmes accroissements dans les uns et les autres, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui des accroissements. Il est donc inutile de recommencer ici les calculs précédents; et la valeur de TM'M'' aura la même expression que celle de l'angle de contingence ω.

277. *Cercle osculateur.* — Dans les courbes à double courbure, comme dans les courbes planes, nous appellerons *cercle osculateur* la limite du cercle qui passe par trois points infiniment voisins; ce cercle limite se trouvera évidemment dans le plan osculateur.

Soient M (*fig.* 94) un point quelconque de la courbe; M', M'' des points qui s'en approchent indéfiniment; O le point de rencontre des perpendiculaires menées par M, M'' à ces deux cordes, dans le plan qui les contient : M'O sera le diamètre du cercle passant par M, M', M''. L'angle O a pour mesure l'arc de cercle MM'M'' divisé par le diamètre M'O. Or on peut substituer à cet arc celui de la courbe, ou $2\Delta s + \Delta^2 s$.

On aura donc $M'O = \frac{2\Delta s}{O}$ en négligeant $\Delta^2 s$.

Mais l'angle O est égal à TM'M'' qui peut être remplacé par l'angle de contingence ω relatif à l'arc Δs. On aura ainsi, en désignant par R le rayon du cercle osculateur, $R = \frac{\Delta s}{\omega}$; d'où, en remettant pour ω l'une ou l'autre des deux expressions données précédemment, on tire les formules rigoureusement exactes

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}},$$

et

$$R = \frac{ds^3}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}.$$

278. *Angle de torsion.* — On appelle ainsi l'angle de deux plans osculateurs consécutifs, ou, pour parler plus exactement, la différentielle correspondante.

Soient α, β, γ les angles que fait avec les axes la normale à un plan osculateur; on aura, d'après l'équation de ce plan, x, y, z étant les coordonnées du point de la courbe,

$$\cos\alpha = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{D},$$

$$\cos\beta = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{D},$$

$$\cos\gamma = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{D},$$

en posant

$$D = \sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

La normale au plan osculateur infiniment voisin fera avec la précédente un angle égal à celui des deux plans; si on le désigne par U, on aura, par un calcul semblable à celui qui a donné l'angle de contingence,

$$U = \sqrt{(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2}.$$

Mais il faut l'obtenir en fonction des différentielles de x, y, z; pour cela, posant

$$dyd^2z - dzd^2y = X, \quad dzd^2x - dxd^2z = Y,$$
$$dxd^2y - dyd^2x = Z,$$

d'où

$$dyd^2z - dzd^2y = dX, \quad dzd^2x - dxd^2z = dY,$$
$$dxd^2y - dyd^2x = dZ,$$

on trouvera

$$\iota = \frac{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(dX^2+dY^2+dZ^2)-(XdX+YdY+ZdZ)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(YdZ-ZdY)^2+(ZdX-XdZ)^2+(XdY-YdX)^2}}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Mais on a

$$\frac{YdZ-ZdY}{dx} = \frac{ZdX-XdZ}{dy} = \frac{XdY-YdX}{dz}$$

$$= dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z)$$
$$+ dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x).$$

Donc

$$\iota = ds\frac{dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)}{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}.$$

Il n'y a pas lieu de représenter cette seconde courbure par celle d'un cercle qui se présenterait aussi naturellement que le cercle osculateur qui mesure la première.

On trouverait la même expression, en négligeant une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, en considérant trois côtés consécutifs d'un polygone infinitésimal inscrit, et cherchant l'angle que le plan des deux premiers fait avec le plan du deuxième et du troisième.

279. Si le rayon de la première courbure est infini pour tous les points d'une ligne, tous les côtés du polygone infinitésimal inscrit dans cette ligne sont dans le prolongement les uns des autres, et, par conséquent, cette ligne est droite. La condition pour qu'une ligne soit droite pourrait donc s'exprimer par l'équation différentielle

$$(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2 = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$dyd^2z - dzd^2y = 0,\quad dzd^2x - dxd^2z = 0,\quad dxd^2y - dyd^2x = 0$$

ou encore

$$d.\frac{dz}{dy}=0,\quad d.\frac{dx}{dz}=0,\quad d.\frac{dy}{dx}=0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dx}{dz}=a,\quad \frac{dy}{dz}=b,$$

a et b étant des constantes arbitraires. Et comme a et b sont les dérivées de az et bz, il suit d'une proposition démontrée précédemment, que les fonctions x et y ne peuvent être que de la forme

$$x=az+\alpha,\quad y=bz+\beta,$$

α et β désignant des constantes arbitraires. On retombe ainsi sur les équations générales de la ligne droite.

Si la seconde courbure est nulle, tous les plans osculateurs se confondront, et la courbe sera plane. La condition pour qu'une courbe soit plane est donc exprimée par l'équation différentielle

$$dx(d^2yd^3z-d^2zd^3y)+dy(d^2zd^3x-d^2xd^3z)$$
$$+dz(d^2xd^3y-d^2yd^3x)=0,$$

équation qui se réduit à

$$d^2yd^3z-d^2zd^3y=0,$$

si l'on prend x pour variable indépendante.

On vérifie bien facilement que cette relation existe pour tous les points d'une ligne située tout entière dans un plan.

280. *Surface polaire.* — Si l'on conçoit un polygone infinitésimal inscrit dans une courbe à double courbure, et qu'on élève des plans perpendiculaires au milieu de ses côtés successifs, la ligne d'intersection de deux de ces plans consécutifs sera le lieu des pôles du cercle passant

par les trois sommets correspondants du polygone; et sa limite sera le lieu des pôles du cercle osculateur, vers lequel tend le cercle variable.

Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'on trouverait la même ligne en cherchant la limite de l'intersection de deux plans normaux consécutifs.

Si l'on agit de la même manière en tous les points de la courbe donnée, on obtiendra une suite de lignes polaires qui formeront une surface qu'on nomme *surface polaire*. Elle n'est autre chose que le lieu des centres des sphères limites de celles qui ont trois points infiniment voisins, communs avec la courbe. Cette surface est développable; car elle est la limite d'une surface qui se compose d'éléments plans indéfinis compris entre les deux intersections successives de trois plans consécutifs. De plus, ces éléments plans ont pour limite de leurs directions, celle des plans tangents : donc tous les plans normaux à la courbe sont tangents à sa surface polaire, et cette dernière peut être considérée comme la surface enveloppe de ces plans.

281. *Sphère osculatrice.* — On désigne sous ce nom la limite des sphères qui ont avec la courbe quatre points communs qui se rapprochent indéfiniment. Le centre de la sphère passant par quatre sommets consécutifs du polygone inscrit, est à la rencontre des deux droites suivant lesquelles se coupent les trois plans perpendiculaires aux trois côtés consécutifs du polygone; c'est le point commun à deux droites polaires consécutives.

Les centres de ces sphères successives déterminent un polygone qui tend vers une courbe dont les droites polaires sont les tangentes; cette courbe est donc l'enveloppe des polaires. Elle est aussi l'arête de rebroussement de la surface développable, lieu de ces polaires, c'est-à-dire de la surface polaire.

282. *Équation de la surface polaire.* — Cette surface est le lieu des intersections successives des plans normaux, ou encore des normales à la courbe donnée. Or l'équation d'un plan normal quelconque est

$$(1) \qquad (x-x')dx' + (y-y')dy' + (z-z')dz' = 0.$$

Si l'on donne à la variable indépendante t, dont on regarde x', y', z' comme des fonctions connues, un accroissement infiniment petit Δt, et que l'on considère le plan normal, au point voisin qui en résulte, son équation se composera des mêmes termes que la précédente, plus les termes résultant du changement des quantités x', y', z', dx', dy', dz'. Les premiers termes s'annulent pour les points communs aux deux plans, et il reste, en négligeant ceux du troisième ordre et passant aux différentielles,

$$(2) \quad (x-x')d^2x' + (y-y')d^2y' + (z-z')d^2z' - ds'^2 = 0.$$

Les équations (1) et (2) ont donc lieu entre les coordonnées x, y, z de tous les points d'une des génératrices de la surface polaire.

Donc on aura l'équation de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre les équations (1), (2) et celles de la courbe donnée.

283. *Centre de la sphère osculatrice.* — Ce centre est la limite du point de rencontre de trois plans normaux consécutifs, ou de deux droites suivant lesquelles se coupent les deux premiers et les deux derniers de ces plans. L'une est représentée à la limite par les deux équations (1), (2); l'autre par ces équations augmentées de leurs différentielles. Pour la limite du point commun aux deux droites, les différentielles des équations (1), (2) par rapport à x', y', z', dx', ..., seront donc nulles, et il en

résultera cette nouvelle équation

$$(3)\,(x-x')\,d^3x'+(y-y')\,d^3y'+(z-z')\,d^3z'-3\,ds'\,d^2s'=0.$$

Les équations (1), (2), (3) donnent le centre de la sphère osculatrice correspondante au point (x', y', z'); et l'on aura les équations du lieu de ces centres, ou de l'arête de rebroussement de la surface polaire, en éliminant x', y', z' entre ces trois équations et celles de la courbe donnée; d'où il résulte deux équations entre x, y, z.

284. Il est facile de reconnaître, au moyen des équations (1), (2), que tout plan normal à la courbe est tangent à la surface polaire. En effet, considérons sur cette dernière un point quelconque infiniment voisin de celui qui a pour coordonnées x, y, z et qui se trouve dans le plan normal déterminé par l'équation (1). Soient considérés dx, dy, dz comme les différences de leurs coordonnées : les équations (1), (2) sont satisfaites par les coordonnées du premier point; et elles le seront par celles du deuxième, si l'on considère le plan normal infiniment voisin qui passe par ce deuxième point.

Or, si l'on donne à x, y, z, x', y', z' les accroissements correspondants dx, dy, dz, dx', dy', dz' dans l'équation (1), il restera, en vertu de l'équation (2),

$$dx\,dx'+dy\,dy'+dz\,dz'=0.$$

Mais la droite qui joint les deux points pris sur la surface polaire, et finit par lui être tangente, fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz; l'équation précédente prouve donc que cette droite est perpendiculaire à la tangente à la courbe au point (x', y', z'), et que, par conséquent, elle est située dans le plan normal, au même point de cette courbe,

puisqu'elle a déjà le point (x, y, z) commun avec ce plan.

285. *Centre de courbure.* — Le centre du cercle osculateur, ou le centre de la première courbure, se trouve dans le plan osculateur, et sur la droite polaire du point que l'on considère sur la courbe. On aura donc ses coordonnées en cherchant les valeurs de x, y, z qui satisfont aux équations

$$(x-x')\,dx' + (y-y')\,dy' + (z-z')\,dz' = 0,$$
$$(x-x')\,d^2x' + (y-y')\,d^2y' + (z-z')\,d^2z' = ds'^2,$$
$$(x-x')(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y') + (y-y')(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')$$
$$+ (z-z')(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') = 0.$$

Ces valeurs de x, y, z sont données par les formules suivantes :

$$z - z' = \frac{R^2}{ds'^4}\left[dy'\,(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y') - dx'\,(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z')\right],$$

$$y - y' = \frac{R^2}{ds'^4}\left[dx'\,(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x') - dz'\,(dy'\,d^2z' - dz'\,d^2y')\right],$$

$$x - x' = \frac{R^2}{ds'^4}\left[dz'\,(dz'\,d^2x' - dx'\,d^2z') - dy'\,(dx'\,d^2y' - dy'\,d^2x')\right],$$

R désignant le rayon de courbure, dont la valeur est

$$R = \frac{ds'^3}{\sqrt{(dy'd^2z' - dz'd^2y')^2 + (dz'd^2x' - dx'd^2z')^2 + (dx'd^2y' - dy'd^2x')^2}}.$$

Si, au lieu de déterminer les coordonnées du centre de courbure, on voulait les équations du lieu de ces centres, il suffirait d'éliminer x', y', z' entre les trois premières équations et celles de la courbe donnée; les deux équations résultantes entre x, y, z seraient celles du lieu demandé.

286. *Contact des courbes à double courbure.* — Cette

théorie est semblable à celle que nous avons donnée pour les courbes planes; seulement, au lieu de couper les courbes par des droites parallèles à un axe, il faudra les couper par des plans parallèles à l'un des plans coordonnés, par exemple au plan x, y. Ainsi, lorsque deux courbes auront un point commun x', y', z', et qu'en les coupant par un plan parallèle au plan x, y et situé à une distance infiniment petite dz' du point commun, la distance des deux points ainsi obtenus sur ces courbes sera infiniment petite, de l'ordre $n+1$, on dira que les courbes ont un contact de l'ordre n. On reconnaît facilement que l'ordre de cette distance infiniment petite est le même pour des plans coordonnés quelconques, pourvu que les tangentes à ces courbes au point commun ne soient pas parallèles au plan sécant. La projection d'une droite sur un plan étant égale au produit de cette droite par le cosinus de son inclinaison sur ce plan, le rapport des longueurs de la droite et de sa projection a une limite finie, si la limite de cette droite ne fait pas un angle droit avec le plan. Donc les trois projections orthogonales d'une droite variable de grandeur et de direction sont, en général, des grandeurs du même ordre que cette droite; et il en est toujours ainsi pour deux de ses projections au moins : il ne peut y avoir qu'une d'entre elles, au plus, qui soit infiniment petite par rapport à cette droite. D'où il suit que, pour que deux courbes à double courbure aient un contact de l'ordre n, il est nécessaire et suffisant que deux de leurs projections aient un contact de cet ordre; ce qui ramène à la théorie du contact des courbes planes. Ainsi les conditions pour que ce contact ait lieu au point dont les coordonnées sont x', y', z', consistent en ce que pour la valeur z' de z, les quantités

$$x,\ y,\ \frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz},\ \frac{d^2x}{dz^2},\ \frac{d^2y}{dz^2},\ \ldots,\ \frac{d^nx}{dz^n},\ \frac{d^ny}{dz^n},$$

aient les mêmes valeurs d'après les équations de ces deux courbes. On obtiendra donc encore la courbe osculatrice d'une espèce donnée, en déterminant les coefficients de ses équations de manière qu'il en résulte le plus de dérivées communes avec la courbe donnée, à partir des premières. Si les projections sur un plan avaient un contact plus élevé que les projections sur un autre, il suit de ce qui précède que le moins élevé des deux exprimerait l'ordre du contact des deux courbes proposées.

287. *Droite osculatrice.* — Les équations générales d'une droite étant

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

les équations qui détermineront a, α, b, β seront

$$x' = az' + \alpha, \quad y' = bz' + \beta, \quad \frac{dx'}{dz'} = a, \quad \frac{dy'}{dz'} = b,$$

les dérivées $\frac{dx'}{dz'}$, $\frac{dy'}{dz'}$ étant tirées des équations de la courbe donnée. La droite osculatrice a donc pour équations

$$x - x' = \frac{dx'}{dz'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{dy'}{dz'}(z - z'):$$

ce sont celles que nous avons déjà trouvées pour la tangente.

288. *Cercle osculateur.* — Les équations les plus commodes pour la détermination d'un cercle dans l'espace sont celles d'une sphère et d'un plan. Soient donc les équations générales du cercle

$$(1) \qquad (z - \gamma)^2 + (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad z + ax + by + c = 0;$$

différentiant deux fois ces équations, en considérant x et y

comme fonctions de z, et les autres quantités comme constantes, on aura les équations suivantes :

$$(3)\qquad (z-\gamma)+(y-\beta)\frac{dy}{dz}+(x-\alpha)\frac{dx}{dz}=0,$$

$$(4)\qquad 1+\frac{dy^2}{dz^2}+\frac{dx^2}{dz^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dz^2}+(x-\alpha)\frac{d^2x}{dz^2}=0,$$

$$(5)\qquad 1+a\frac{dx}{dz}+b\frac{dy}{dz}=0,$$

$$(6)\qquad a\frac{d^2x}{dz^2}+b\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

On remettra dans ces six équations, au lieu de x, y, z, les coordonnées du point donné de la courbe, et l'on remplacera toutes les dérivées par celles que donneront les équations de cette même courbe. On en déduira les valeurs de six des constantes $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, R, et il en restera une indéterminée, parce qu'on peut faire passer une infinité de sphères par un même cercle.

Les coefficients a, b, c sont entièrement déterminés, et l'équation du plan devient, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point donné,

$$(z-z')(dx'\,d^2y'-dy'\,d^2x')-dz'\,d^2y'(x-x')$$
$$+dz'\,d^2x'(y-y')=0.$$

Cette équation n'est autre chose que celle du plan osculateur, dans laquelle z est pris pour variable indépendante. Les équations (3), (4), dans lesquelles on regardera α, β, γ comme variables, représentent deux plans qui sont perpendiculaires au plan (2), en vertu des équations (5), (6). Les centres des sphères sont donc sur une perpendiculaire au plan du cercle, et elles couperont toutes ce plan suivant un même cercle, puisqu'elles passeront d'ailleurs par un même point (x', y', z').

Il est facile de reconnaître dans les équations (3), (4) celles qui déterminent la droite polaire relative au point (x', y', z') quand on prend z pour variable indépendante; et comme le centre du cercle s'obtiendra en cherchant l'intersection de cette droite avec le plan du cercle, on retrouve, d'après ce nouveau point de vue, tout ce qui avait été déterminé relativement au cercle osculateur, par des considérations différentes.

Contact des surfaces.

289. Lorsque deux surfaces ont un point commun (x', y', z'), et qu'en faisant varier x', y' de quantités infiniment petites quelconques dx', dy', la différence des valeurs de z correspondantes est un infiniment petit de l'ordre $n+1$, on dit que ces surfaces ont un contact de l'ordre n. L'ordre de cette différence est le même pour toutes les directions qui ne sont pas parallèles aux plans tangents à ces surfaces, au point que l'on considère : il résulte de là que deux surfaces auront un contact du premier ordre, lorsque pour une même valeur de x', y' on tirera des équations de l'une et de l'autre les mêmes valeurs pour $z', \frac{dz'}{dx'}, \frac{dz'}{dy'}$.

Elles auront un contact du second ordre lorsqu'elles donneront, en outre, les mêmes valeurs pour les coefficients différentiels partiels du second ordre

$$\frac{d^2z'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2z'}{dx'\,dy'}, \quad \frac{d^2z'}{dy'^2}.$$

Enfin le contact sera de l'ordre n lorsque tous les coefficients différentiels seront les mêmes jusqu'à cet ordre inclusivement.

La surface osculatrice d'une espèce donnée se déterminera comme les courbes osculatrices, en établissant le plus

grand nombre possible de dérivées communes entre les fonctions qui expriment la valeur de z dans son équation et celle de l'autre surface que l'on considère.

290. *Plan osculateur à une surface.* — Soit l'équation générale d'un plan

$$z = ax + by + c;$$

on aura, pour déterminer a, b, c, les équations

$$z' = ax' + by' + c; \quad \frac{dz'}{dx'} = a, \quad \frac{dz'}{dy'} = b,$$

$\frac{dz'}{dx'}$, $\frac{dz'}{dy'}$ étant tirées de l'équation de la surface donnée. L'équation du plan osculateur sera donc

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Ce plan n'est donc autre chose que le plan tangent.

291. *Sphère osculatrice à une surface.* — L'équation la plus générale d'une sphère ne renfermant que quatre constantes arbitraires, on ne peut, en général, établir un contact du second ordre entre une sphère et une surface donnée, puisqu'il en résulterait six équations de condition. On ne pourra donc établir, entre ces surfaces, qu'un contact du premier ordre. Il restera une constante indéterminée dans l'équation de la sphère, et l'on pourra en profiter de manière à déterminer un contact du second ordre avec l'une des courbes que l'on peut tracer sur la surface; mais ces recherches nous écarteraient de notre objet.

292. *Contact des courbes et des surfaces.* — Si, à

partir d'un point commun à une courbe et à une surface, on mène des parallèles à l'axe des z, on dira qu'il y a un contact de l'ordre n, lorsque la différence des valeurs correspondantes de z pour la courbe et la surface sera infiniment petite de l'ordre $n+1$. On arrivera à des conditions du même genre que dans les cas précédents, et dans le détail desquelles nous n'entrerons pas.

293. *Développées.* — Si l'on considère une quelconque des normales en un point d'une courbe à double courbure, elle sera tangente à la surface polaire. Le plan normal mené par un point de la courbe, infiniment voisin du premier, coupera cette normale en un point qui sera commun à deux normales infiniment voisines. En faisant pour la seconde normale ce qui a été fait pour la première, et continuant ainsi, on aura une suite indéfinie de normales à la courbe donnée, dont chacune rencontrera la suivante, et dont les points de contact avec la surface polaire seront infiniment rapprochés les uns des autres. Le point de concours des deux normales consécutives, se trouvant sur l'intersection des deux plans normaux, se rapproche indéfiniment de la surface polaire, qui est le lieu des limites des intersections des plans normaux consécutifs.

Cette suite de normales détermine donc un polygone dont les côtés sont infiniment petits, et dont la limite est une courbe tangente à toutes ces normales, et située sur la surface polaire : on l'appelle *développée* de la courbe donnée.

Comme on peut choisir une quelconque des normales à la courbe au point de départ, on obtiendra une infinité de développées aussi rapprochées que l'on voudra, et toutes seront sur la surface polaire, qui peut être considérée comme en étant le lieu géométrique. Relativement

à ces courbes que nous avons nommées développées, la première prend le nom de *développante*, à cause d'une propriété analogue à celle que nous avons reconnue dans les courbes planes, et dont nous allons donner la démonstration.

Soient MN, M'N' (*fig.* 95) deux droites normales en M et M' à la courbe en question, N et N' leurs points de contact avec la développée; nous allons prouver que la différence des longueurs M'N' et MN est égale à l'arc NN', à un infiniment petit près, du second ordre au moins. En effet, si aux points M et N on conçoit deux plans perpendiculaires à MN, la longueur M'P sera du second ordre puisque la courbe M'M est tangente au plan; de plus, QP surpasse MN d'une quantité infiniment petite du second ordre. On peut donc prendre N'Q comme égale à la différence M'N' — MN, à une quantité près du second ordre. Mais la limite du rapport de N'Q à la corde NN' est l'unité, puisque les angles Q et N du triangle rectiligne QNN' tendent vers des angles droits. Donc N'Q diffère de l'arc N'N, tout au plus d'un infiniment petit du second ordre; donc, enfin, la différence de deux normales consécutives MN, M'N' est égale à l'arc NN', compris entre leurs points de contact avec la développée, plus ou moins une quantité infiniment petite par rapport à cet arc, et qui, par conséquent, peut être négligée sans qu'il en résulte aucune erreur dans les limites des rapports ou des sommes.

Il résulte de là que si en deux points quelconques de la développée on mène des tangentes terminées à la développante, la différence de leurs longueurs est rigoureusement égale à l'arc compris entre les points de contact.

Et l'on voit par là que la différence entre M'N' — MN

et l'arc NN', qui devait être au moins du second ordre, était réellement égale à zéro.

Maintenant supposons un fil qui coïncide avec la développée à partir d'un point quelconque, où il s'en sépare tangentiellement et se prolonge jusqu'à la développante. Si on le déroule en le laissant toujours tangent à la développée, il prendra successivement la position des diverses normales qui sont tangentes à cette courbe; et ces normales croissant précisément de la même longueur que le fil qui se déroule, ce sera toujours le même point de ce fil qui se trouvera sur la développante. Cette courbe sera donc décrite par l'extrémité du fil pris dans la première position. C'est cette propriété qui a fait donner aux deux courbes, l'une par rapport à l'autre, les noms de *développée* et *développante*.

294. Le lieu des centres des cercles osculateurs d'une courbe à double courbure n'est pas une développée de cette courbe. En effet, deux plans osculateurs consécutifs se coupent suivant une droite qui a pour limite la tangente, et ils forment entre eux un angle infiniment petit du premier ordre. La distance du centre de courbure contenu dans le premier, au second plan, est donc un infiniment petit du premier ordre; or sa distance à la normale contenue dans ce second plan est plus grande que sa distance au plan : donc cette normale n'est pas tangente à la courbe qui passe par ces deux centres, puisqu'il faudrait pour cela que cette distance fût un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier. Le lieu des centres de courbure n'est donc pas une des développées, lorsque la courbe que l'on considère n'est pas plane.

295. Les développées d'une courbe à double courbure jouissent de la propriété remarquable de se réduire à des

lignes droites quand on développe la surface polaire sur un plan.

Pour le démontrer, nous considérerons un polygone infinitésimal inscrit dans la courbe donnée, et ayant ses côtés égaux; ce qui revient à prendre l'arc pour variable indépendante. Sur les milieux de ces côtés nous concevrons des plans perpendiculaires, dont les intersections formeront les arêtes de la surface développable qui, à la limite, devient la surface polaire.

Or, si du point milieu d'un côté quelconque on trace une droite dans le plan normal, elle coupera l'arête commune à ce plan et au suivant, en un point qui, joint au milieu du côté suivant, donnera une normale à ce côté; et il est facile de voir que ces deux normales font des angles égaux avec l'arête que nous avons considérée.

Cette seconde normale prolongée coupera l'arête commune au second plan normal et au troisième, en un point qui, joint au milieu du troisième côté, formera une normale à ce côté, faisant avec la seconde arête le même angle que la normale précédente; et ainsi de suite indéfiniment.

Maintenant, si l'on développe sur un plan la surface qui renferme toutes ces arêtes, deux normales consécutives se rabattront l'une sur l'autre, puisqu'elles font le même angle avec l'arête sur laquelle elles se coupent; et le polygone infinitésimal, formé par les intersections de ces normales successives, aura tous ses côtés sur une même droite. Ce résultat ayant lieu quelle que soit la petitesse des côtés de ce polygone, aura lieu pour la courbe limite, qui est une quelconque des développées de la courbe proposée.

Donc, dans le rabattement de la surface polaire sur un

plan, toutes les développées de la courbe deviennent des lignes droites.

296. Dans le développement de la surface polaire, les côtés infiniment petits qui composent la développée ne changeant pas de longueur, un arc quelconque de cette courbe a la même longueur avant ou après le développement; et il en serait de même de toute autre ligne tracée sur cette surface. Donc le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface polaire est l'arc de la développée qui passe par ces deux points, puisque, devenant une ligne droite, il est plus court que tout autre après une transformation qui n'a pas changé les longueurs.

On peut encore remarquer que si l'on suppose un fil appliqué sur le polygone formé par les normales successives que nous venons de considérer, et prolongé suivant un quelconque des côtés jusqu'au milieu du côté correspondant du premier polygone, inscrit dans la courbe donnée, et qu'ensuite on développe ce fil de manière à ce qu'il soit successivement dans le prolongement de chacun des côtés du polygone sur lequel il est appliqué, son extrémité passera par tous les milieux des côtés de l'autre polygone. Donc, si l'on passe aux limites des polygones, on retrouvera la propriété démontrée précédemment par des considérations différentes.

297. *Equations des développées.*—Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée, l'équation de la surface polaire s'obtient en éliminant x', y', z' entre les deux équations de la courbe et les deux suivantes :

$$(x - x')\,dx' + (y - y')\,dy' + (z - z')\,dz' = 0,$$
$$(x - x')\,d^2x' + (y - y')\,d^2y' + (z - z')\,d^2z' = ds'^2,$$

Si maintenant on considère un quelconque des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à ces équations, on passera de ce point au point voisin de la développée si la droite qui joint ces deux points est dans le prolongement de celle qui joint les points (x', y', z'), (x, y, z); ce qui aura lieu si les différentielles dx, dy, dz sont proportionnelles aux différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. On tirerait de là les deux équations

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y - y'}{z - z'}.$$

Mais une seule sera nécessaire, parce que les précédentes expriment que les points (x, y, z) ne cessent pas d'être sur la surface polaire. Une quelconque de ces deux équations étant jointe aux deux précédentes, et à celles de la courbe donnée, on aura cinq équations entre lesquelles on éliminera x', y', z', et l'on obtiendra deux équations différentielles qui conviendront à l'une quelconque des développées.

Application des théories précédentes à l'hélice.

298. Si l'on désigne par a le rayon de la base du cylindre, et par m la tangente de l'inclinaison de l'hélice sur le plan de cette base, les équations des trois projections de cette courbe seront

$$x = a \cos \frac{z}{ma}, \quad y = a \sin \frac{z}{ma}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

L'axe des x passe par le point où l'hélice perce le plan de la base; et cette courbe, en s'élevant, tourne de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs.

Ces équations différentiées donnent

$$dx = -\frac{1}{m}\sin\frac{z}{ma}dz, \quad dy = \frac{1}{m}\cos\frac{z}{ma}dz, \quad ds = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}dz,$$

$$d^2x = -\frac{1}{m^2a}\cos\frac{z}{ma}dz^2, \quad d^2y = -\frac{1}{m^2a}\sin\frac{z}{ma}dz^2, \quad d^2s = 0.$$

L'équation du plan osculateur devient alors, en prenant z pour variable indépendante,

$$z - z' = -mx\sin\frac{z'}{ma} + my\cos\frac{z'}{ma}.$$

Ce plan fait avec le plan de la base un angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ et la tangente m. Il est le même que celui de l'hélice avec le même plan.

L'équation du plan normal sera

$$m(z - z') = x\sin\frac{z'}{ma} - y\cos\frac{z'}{ma}.$$

L'angle de contingence, dont l'expression générale est

$$\upsilon = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2},$$

devient, dans le cas actuel,

$$\upsilon = \frac{dz}{am\sqrt{1+m^2}}.$$

L'angle de deux plans osculateurs consécutifs est

$$\frac{dz}{a\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ou} \quad m\upsilon.$$

Le rayon du cercle osculateur, dont la valeur générale

est $R = \frac{ds}{v}$, sera égal à $a(1 + m^2)$; sa grandeur est donc constante et surpasse de am^2 le rayon de la base. Pour connaître sa direction, il faut chercher l'intersection du plan normal et du plan osculateur. Les équations combinées donnent

$$z = z', \quad y = x \operatorname{tang} \frac{z'}{ma}.$$

Donc le rayon de courbure est constamment parallèle au plan de la base, et rencontre l'axe du cylindre. Le centre de courbure se meut donc sur un cylindre ayant même axe que le premier, et pour base un cercle dont le rayon est am^2. Il décrit donc sur ce cylindre une hélice dont le pas est le même que celui de l'hélice proposée.

On trouvera le même résultat en calculant les coordonnées du centre de courbure. Leurs valeurs sont

$$z = z', \quad y = -am^2 \sin \frac{z}{ma}, \quad x = -am^2 \cos \frac{z}{ma},$$

et l'on en déduit immédiatement les conséquences précédentes.

Déterminons maintenant les équations d'une arête quelconque de la surface polaire, c'est-à-dire de l'intersection des deux plans normaux infiniment voisins. Ces équations sont les suivantes :

$$m(z - z') = x \sin \frac{z'}{ma} - y \cos \frac{z'}{ma},$$

$$x \cos \frac{z'}{ma} + y \sin \frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Cette droite est nécessairement perpendiculaire au plan osculateur, et on le vérifiera facilement au moyen de ses

équations. Comme d'ailleurs elle passe par le centre de courbure et qu'elle est perpendiculaire au rayon de courbure, elle est tangente au cylindre sur lequel se meut l'extrémité de ce rayon, et dont la base a pour rayon am^2. De plus, il est facile de reconnaître qu'elle est tangente à l'hélice décrite par cette extrémité. En effet, puisqu'elle est perpendiculaire au plan osculateur, elle fait avec le plan de la base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$: or l'hélice qui est le lieu des centres de courbure, et dont nous venons de donner les équations, est tracée sur le cylindre dont le rayon est am^2, et fait avec sa base un angle dont la tangente est $\frac{1}{m}$. Donc l'arête de la surface polaire est tangente à cette hélice, et la surface polaire est l'héliçoïde développable dont cette hélice est l'arête de rebroussement.

Mais on sait que la sous-tangente d'une hélice sur le plan de sa base est égale à l'arc de cette base, depuis l'origine de l'hélice jusqu'à la projection du point de contact. Donc la trace de la surface polaire sur le plan (xy) est la développante de la base du cylindre dont le rayon est am^2.

299. Si l'on veut avoir l'équation de la surface polaire, il faut éliminer z' entre les deux équations

$$m(z - z') = x \sin\frac{z'}{ma} - y \cos\frac{z'}{ma},$$

$$x \cos\frac{z'}{ma} + y \sin\frac{z'}{ma} = -am^2.$$

Ajoutant les carrés des membres de ces deux équations, on obtient

$$m^2[(z - z')^2 + a^2 m^2] = x^2 + y^2;$$

substituant dans la seconde, on trouve l'équation cherchée, qui est

$$x \cos\left(\frac{z}{ma} \pm \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right)$$

$$+ y \sin\left(\frac{z}{ma} \mp \sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1}\right) = -am^2.$$

La trace de cette surface sur le plan (xy) a pour équation

$$x \cos\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} \pm y \sin\sqrt{\frac{x^2+y^2}{m^4a^2} - 1} = -am^2.$$

Cette courbe est la développante du cercle dont le rayon est am^2, et elle prend naissance au point de ce cercle situé sur l'axe des x, et du côté des x négatifs; ce qui s'accorde avec une des propositions précédemment démontrées.

Une hélice pouvant avoir ses deux courbures égales à celle d'une courbe quelconque en un de ses points, son osculation sera d'un ordre plus élevé que celle du cercle; elle donnerait donc une idée plus exacte de la courbe à laquelle on la comparerait. Les deux constantes m et a se détermineraient en égalant ses deux courbures à celles de la courbe donnée, au point considéré.

LIVRE III.

DES LIMITES DE SOMMES. CALCUL INVERSE DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

COMMENT LE PROBLÈME DES LIMITES DE SOMMES SE RAMÈNE AU PROBLÈME INVERSE DE CELUI DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

300. Nous avons résolu d'une manière générale le problème d'analyse qui a pour objet la recherche de la limite du rapport de quantités infiniment petites, lorsque ces quantités sont les accroissements simultanés de variables liées par des équations données. Ce dernier cas est le plus ordinaire, et on y ramène en général les autres; cependant il peut en être autrement, et l'on en voit des exemples dans quelques-unes des questions géométriques que nous avons traitées: on se dirige alors suivant les circonstances.

Nous allons maintenant nous occuper du problème infinitésimal qui a pour objet la détermination des limites de sommes, et chercher si l'on peut le ramener comme le précédent à des méthodes générales de calcul.

Remarquons d'abord que dans toutes les questions de ce genre que nous avons étudiées précédemment, les quantités infiniment petites que nous avons substituées aux éléments exacts de la grandeur à évaluer présentent ce caractère commun, que leur expression analytique est le produit d'une fonction d'une variable par l'accroisse-

ment infiniment petit que prend cette variable quand on passe d'un élément au suivant. Commençons par reconnaître ce point important.

301. Quand nous avons voulu déterminer l'aire d'une courbe plane, nous avons employé un premier mode de décomposition par des parallèles infiniment voisines; et au lieu des segments eux-mêmes compris entre deux parallèles consécutives, nous avons considéré les parallélogrammes intérieurs ou extérieurs, qui en diffèrent d'une quantité infiniment petite par rapport à ces segments. Pour avoir l'expression générale de ces parallélogrammes, prenons un axe des x perpendiculaire aux sécantes et un axe des y parallèle; l'expression de la corde qui est le côté fini du parallélogramme rectangle est une fonction de x donnée par la nature du contour. Si on la représente par $F(x)$, et qu'on désigne par Δx la différence des x correspondants à deux parallèles consécutives, l'aire cherchée sera la limite de la somme des valeurs que prendra $F(x)\Delta x$ lorsque x prendra successivement toutes les valeurs, à partir d'une première qui est donnée, croissant par intervalles Δx, égaux ou inégaux, mais indéfiniment décroissants, jusqu'à ce que l'on parvienne à la valeur de x, qui termine la surface à évaluer.

Cette surface a donc pour expression analytique

$$\lim. \sum F(x)\Delta x$$

dans le sens qui vient d'être développé.

Passons à un autre mode de décomposition des aires, et considérons-les comme décomposées par des droites partant d'un même point et faisant entre elles des angles infiniment petits. La question revient alors à trouver la limite d'une somme de secteurs circulaires ayant pour rayons les rayons vecteurs de la courbe, et pour angle

au centre les différences des valeurs successives de l'angle du rayon vecteur avec l'axe fixe.

Désignant cet angle par θ, et par r le rayon vecteur qui est une fonction donnée de θ, il s'agira de calculer la valeur de $\lim. \sum \frac{r^2}{2} \Delta\theta$, ou, en représentant $\frac{r^2}{2}$ par $F(\theta)$, la valeur de

$$\lim. \sum F(\theta)\, d\theta;$$

on en revient donc encore au même problème d'analyse.

On reconnaîtra facilement qu'on est ramené à ce même problème pour la cubature des solides, la rectification des courbes, la quadrature des surfaces courbes, et les autres limites de sommes que nous avons considérées.

Occupons-nous donc de ce problème unique d'analyse auquel nous conduisent toutes ces recherches de limites de sommes.

Soit $F(x)$ une fonction quelconque de x contenue entre deux limites x_0 et X; et démontrons d'abord qu'il existe une limite déterminée pour la somme $\sum F(x)\Delta x$ lorsque l'on prend successivement pour x les valeurs depuis x_0 jusqu'à X, croissant par intervalles égaux ou inégaux, désignés par Δx.

Il suffit pour cela de concevoir une courbe ayant pour équation $y = F(x)$; $\sum F(x)\Delta x$ sera la somme de rectangles intérieurs ou extérieurs que nous avons démontré avoir pour limite l'aire de la courbe entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x_0, X. Il est donc certain que, quel que soit $F(x)$, l'expression $\sum F(x)\Delta x$ a une limite déterminée, indépendante des grandeurs relatives des accroissements infiniment petits.

Nous représenterons cette limite de la manière suivante :

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\, dx,$$

et nous lui donnerons le nom d'*intégrale* de $F(x)\,dx$ entre les limites x_0, X.

Identité du problème des limites de sommes avec le problème inverse du calcul différentiel.

302. Remarquons maintenant que si, laissant x_0 constant, nous regardons X comme variable, l'intégrale, ou l'aire qui la représente, sera une fonction de cette valeur extrême X, que nous remplacerons par la lettre x. Or il est facile de voir que la dérivée de cette fonction sera $F(x)$. Car si l'on augmente x de Δx, l'aire augmentera d'une quantité dont le rapport avec le rectangle $F(x)\,\Delta x$ a pour limite l'unité, quand Δx tend vers zéro; la limite du rapport de l'accroissement de l'aire ou de l'intégrale à l'accroissement de la variable x ne sera donc pas altérée en substituant $F(x)\,\Delta x$ à l'accroissement exact de cette intégrale, et par conséquent sa dérivée sera $F(x)$.

D'où résulte cette proposition importante :

L'intégrale $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$ *prise depuis une valeur constante* x_0 *jusqu'à une valeur indéterminée* x *est une fonction dont la dérivée, par rapport à* x, *est* $F(x)$, *ou dont la différentielle est* $F(x)\,dx$.

Le problème qui a pour objet la détermination des limites de sommes d'infiniment petits dont on donne la forme générale $F(x)\,dx$, est donc renfermé dans celui qui a pour objet de remonter de la dérivée, ou de la différentielle d'une fonction, à cette fonction. Ce dernier problème est l'inverse de celui du calcul des dérivées, ou des différentielles des fonctions; et il est prouvé par ce qui précède *qu'il a toujours une solution*, puisqu'il renferme celle du problème des limites de sommes, dont nous avons démontré l'existence.

Il nous reste donc à chercher des règles générales pour remonter des dérivées aux fonctions.

303. Mais nous ferons d'abord une observation importante. Si l'on connaît une solution de cette question, c'est-à-dire une fonction ayant pour dérivée la fonction donnée, on en aura une plus générale en lui ajoutant une constante arbitraire, c'est-à-dire une quantité indépendante de la variable dont il s'agit; car la dérivée ne sera pas changée par cette addition, puisque la dérivée d'une constante est nulle. Et il y a plus : il n'existe pas d'autres solutions que celles que l'on obtient ainsi ; car on ne peut ajouter à la première fonction qu'une quantité qui ne change pas la dérivée, et, par conséquent, dont la dérivée soit nulle d'elle-même. Or nous avons vu (n° 191) qu'il n'y avait qu'une quantité indépendante de la variable qui pût avoir sa dérivée nulle pour toute valeur de la variable. D'où résulte cette importante proportion :

Lorsque l'on aura trouvé une fonction particulière de x dont la dérivée par rapport à x sera la fonction donnée, on aura la fonction la plus générale qui satisfasse à cette même condition, en ajoutant à la première une constante arbitraire.

Cette intégrale générale s'écrit de l'une des deux manières suivantes :

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C, \quad \text{ou} \quad \int F(x)\,dx.$$

304. *Détermination de la constante.* — Nous avons dit que la limite de la somme $\sum F(x)\,\Delta x$, ou l'intégrale $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$, était une fonction de x ayant pour dérivée $F(x)$. Soit $\varphi(x)$ une fonction particulière trouvée par

un moyen quelconque, et satisfaisant à cette condition : la fonction la plus générale qui y satisfera sera, par ce qui précède,

$$\varphi(x) + c,$$

c désignant une constante arbitraire. Donc $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$ est compris dans l'expression générale $\varphi(x) + c$, et il ne s'agit plus que de fixer la valeur qu'il faut donner à l'indéterminée c pour obtenir l'intégrale cherchée, qui est complétement déterminée. Posons donc

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = \varphi(x) + c,$$

et donnons à x une valeur particulière quelconque ; les deux membres devant être toujours égaux, on en déduira la valeur de c, si celle du premier membre est connue. La plus simple de toutes les valeurs de x à choisir est x_0 qui annule évidemment le premier membre, d'après sa signification même ; et il en résultera

$$\varphi(x_0) + c = 0, \quad \text{d'où} \quad c = -\varphi(x_0),$$

et par suite

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Cette formule exprime que l'intégrale est l'accroissement que prend une fonction $\varphi(x)$ ayant pour différentielle $F(x)\,dx$, lorsque l'on passe de la valeur x_0 à la valeur x de la variable. Et c'est ce qu'il est facile de reconnaître directement : en effet, l'accroissement fini d'une fonction est égal à la somme des accroissements infiniment petits qu'elle prend successivement, quand on fait passer la variable de la première valeur à la dernière par degrés indéfiniment décroissants. Or cette somme est égale à la limite de celle des différentielles de la fonction, qui ne diffèrent des accroissements mêmes que de quan-

tités infiniment petites par rapport à eux : elle est donc égale à la limite de $\sum F(x)\,dx$. D'où il suit que pour connaître cette dernière, il suffit de chercher une fonction ayant pour différentielle $F(x)\,dx$, ou pour dérivée $F(x)$, et de prendre l'accroissement qu'elle subit lorsqu'on fait passer la variable de x_0 à x. Ce qui conduit à la formule précédente.

305. Remarque. — Toutes les fois que l'on a à calculer une grandeur, on peut ramener le problème à la recherche d'une fonction, lors même que la grandeur serait bien déterminée, comme par exemple le volume d'une sphère dont le rayon serait un nombre particulier. Et non-seulement parce qu'on pourrait chercher l'expression générale d'une sphère dont le rayon est indéterminé, expression qui sera une fonction du rayon, dans laquelle on pourra ensuite donner à ce rayon la valeur particulière en question; mais en conservant toujours cette valeur particulière, on peut chercher l'expression générale d'une partie de la sphère, déterminée par un plan perpendiculaire à un certain diamètre et qui réponde à un segment arbitraire de ce diamètre : on a ainsi une fonction de ce segment variable, et on aura le volume de la sphère en supposant ce segment égal au diamètre même. Ayant ainsi ramené les problèmes à la recherche d'une fonction, si l'on ne voit pas de moyen facile de la déterminer elle-même, on peut chercher si sa dérivée serait plus facile à connaître. S'il en est ainsi, le problème est ramené à celui dont nous nous occupons, et qui a pour objet de remonter d'une dérivée à la fonction. C'est ainsi que l'on aurait pu prendre tous les problèmes des limites de sommes que nous avons étudiés sous un autre point de vue qui était plus naturel, et devait se présenter le premier.

CHAPITRE II.

DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

306. *Intégration immédiate.* — Lorsqu'on reconnaît dans l'expression à intégrer la différentielle d'une fonction connue, il suffit d'ajouter à cette fonction une constante arbitraire pour avoir l'intégrale générale demandée; et il est bon d'observer que si l'on multiplie une différentielle par une constante quelconque, l'intégrale se trouve multipliée par le même nombre. Ainsi d'abord, en considérant les différentielles de toutes les fonctions simples, comme nous l'avons déjà remarqué vers le commencement du calcul différentiel, on formera un premier recueil d'intégrales indéfinies, renfermées dans le tableau suivant :

$$d.x^{m+1} = (m+1)x^m dx, \ldots, \qquad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$d.a^x = a^x \mathrm{l}\, a dx, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}\, a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$d.\log x = \frac{\log e}{x} = \frac{1}{x \mathrm{l}\, a}, \ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{x} = \frac{\log x}{\log e} + C = \mathrm{l}\, x + C,$$

$$d.\sin x = \cos x dx, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$d.\cos x = -\sin x dx, \ldots\ldots\ldots, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,$$

$$d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$d.\text{arc}\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C,$$

$$d.\text{arc}\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ldots\ldots, \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\cos x + C,$$

$$d.\text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}, \ldots\ldots, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C,$$

$$d.\text{arc cot}\, x = \frac{-dx}{1+x^2}, \ldots\ldots, \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \text{arc cot}\, x + C.$$

Nous désignons ici par x une variable quelconque, qui pourrait être une fonction d'une autre variable.

En d'autres termes, on peut remplacer x par une fonction quelconque $\varphi(x)$ dans toutes les formules précédentes. Ainsi, par exemple, la première donnera

$$\int [\varphi(x)]^m . d.\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1} + C.$$

307. Il y a une remarque à faire sur la formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Elle devient illusoire lorsque l'on suppose $m = -1$. Dans ce cas, la différentielle est $\frac{dx}{x}$; et son intégrale $lx + C$ n'étant plus algébrique ne saurait, en effet, être fournie par l'expression algébrique $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Néanmoins, comme la formule est exacte, quelque près que m soit de -1, on peut en déduire l'expression qui doit la remplacer dans ce cas particulier, en faisant converger m vers la limite -1, et choisissant la constante arbitraire de manière à ce que le résultat tende vers une limite finie. Il suffira, pour cela, de mettre le second membre sous la forme $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1$, et la première

partie se présentera sous la forme $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$, C_1 étant une constante arbitraire; on aura ainsi constamment

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C_1.$$

La première partie qui devient $\frac{0}{0}$ quand on fait $m = -1$, a une limite déterminée, égale à $lx - la$; et si l'on fait $C_1 - l.a = C'$, C' restant arbitraire, on aura

$$\int x^{-1} dx = lx + C',$$

ce qui s'accorde avec la troisième formule du tableau précédent.

308. *Intégration par décomposition.* — La différentielle d'une somme de fonctions étant la somme des différentielles de ces fonctions, il s'ensuit qu'on aura l'intégrale générale d'une somme de différentielles, en faisant la somme de leurs intégrales, et y ajoutant une constante arbitraire, si l'on n'en a déjà ajouté dans les intégrations partielles.

On pourra donc intégrer une expression différentielle, si l'on peut la décomposer en plusieurs autres dont on connaisse les intégrales. Quelquefois la décomposition n'est employée que pour ramener à des expressions plus simples, que l'on cherche ensuite à intégrer par d'autres procédés.

Le nombre des parties dans lesquelles on décompose la fonction donnée peut être infini; c'est ce qui arrive quand on la développe en série : dans ce cas il faudra toujours faire la somme des intégrales des différents termes; mais il y a quelques précautions à prendre relativement à la convergence des séries, et nous reviendrons plus tard sur ce point.

309. *Intégration par substitution.* — Si l'on a à intégrer $F(x)\,dx$, et que l'on pose $x = \varphi(z)$, d'où $dx = \varphi'(z)\,dz$, l'expression donnée devient $F[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$; et la limite de la somme des valeurs de celle-ci sera la même que la limite de la somme des valeurs de $F(x)\,dx$, pourvu que les valeurs extrêmes se correspondent dans ces deux sommes. Donc on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_{z_0}^{z_1} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz,$$

pourvu que z_0 et z_1 soient déterminés par les équations

$$x_0 = \varphi(z_0), \quad x_1 = \varphi(z_1).$$

On conclut de là que l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx + C$ peut être remplacée par

$$\int_{z_0}^{z} F[\varphi(z)]\varphi'(z)\,dz + C.$$

On peut encore s'en assurer en observant que la fonction, dont la dérivée par rapport à x est $F(x)$, doit avoir pour dérivée par rapport à z,

$$F(x)\varphi'(z), \quad \text{ou} \quad F[\varphi(z)]\varphi'(z).$$

La question est donc ramenée à trouver une fonction dont la dérivée par rapport à z soit la fonction $F[\varphi(z)]\,\varphi'(z)$.

La relation $x = \varphi(z)$ étant arbitraire, on parvient souvent à la déterminer de manière à rendre la seconde intégration plus simple que la première.

Ainsi, par exemple, $\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx$ devient, en posant $x + a = y$,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(y)\,dy.$$

ou, en changeant la lettre y en x,

$$\int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx;$$

on a donc

$$\int_{x_0}^{x} F(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{x+a} F(x)\,dx.$$

Si, dans l'intégrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, on pose $x = ay$, d'où $dx = ady$, on a

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,y + C = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C.$$

Soit maintenant

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad x^2+a^2 = y^2, \quad xdx = y\,dy,$$

on aura

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dy = y + C = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Voici encore quelques exemples :

$$\int e^x F(e^x)\,dx, \quad e^x = y, \quad e^x dx = dy, \quad \int e^x F(e^x)\,dx = \int F(y)\,dy,$$

$$\int \cos x\,F(\sin x)\,dx, \quad \sin x = y, \quad \int \cos x\,F(\sin x)\,dx = \int F(y)\,dy$$

$$\int F(lx)\frac{dx}{x}, \quad lx = y, \quad \frac{dx}{x} = dy, \quad \int F(lx)\frac{dx}{x} = \int F(y)\,dy.$$

310. *Intégration par parties.* — La formule

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

donne

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

et ramène la recherche de l'intégrale $\int udv$ à celle de $\int vdu$.

Or on peut souvent décomposer la fonction F (x), qui se trouve sous le signe d'intégration, en deux facteurs tels, que l'un soit une différentielle connue, et que l'intégrale à laquelle on est conduit par ce procédé soit plus simple que la première. Cette méthode s'appelle *intégration par parties*. Soit, par exemple, $\int x \cos x dx$, on prendra $\cos x dx$ pour la différentielle dv, et x remplacera u; on aura donc

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

De même

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx.$$

Cette dernière se ramènera à une autre où l'exposant de x sera $m - 2$, et ainsi de suite; on finira donc par arriver à $\int \sin x dx$ ou $\int \cos x dx$, suivant que m sera impair ou pair. Nous allons appliquer ces différentes méthodes au petit nombre de fonctions qui peuvent être intégrées généralement.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES.

311. Toute fonction rationnelle de x peut être considérée comme composée d'une partie entière par rapport à x et d'une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur : il y aura des cas où l'une de ces deux parties seulement existera. La partie entière s'intégrant toujours immédiatement, il ne peut y avoir de difficulté que pour la partie fractionnaire; et c'est la méthode de décomposition qu'on y appliquera.

Soit donc $\frac{F(x)}{f(x)}dx$ la différentielle qu'il s'agit d'intégrer, $F(x)$ étant d'un degré moindre que $f(x)$. On cherchera à décomposer $\frac{F(x)}{f(x)}$ en fractions plus simples, ayant pour dénominateurs les facteurs premiers de $f(x)$; ce qui exige d'abord que l'on cherche les racines de ce polynôme. Supposons-les déterminées, et considérons d'abord le cas où elles seraient toutes inégales; désignons-les par $a, b, c, \ldots, l$. Soient $A, B, C, \ldots, L$, des constantes indéterminées, et proposons-nous de satisfaire à l'identité

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

ou, en multipliant par $f(x)$,

$$(1)\quad F(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + C\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + L\frac{f(x)}{x-l}.$$

Toutes ces divisions indiquées dans le second membre donnent des quotients entiers, et les indéterminées sont en même nombre que les différents ordres de termes, relativement à x : on pourrait donc trouver leurs valeurs en égalant, suivant la méthode ordinaire, les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Mais il existe dans le cas actuel un moyen beaucoup plus simple. En effet, si l'on fait $x = a$, l'identité subsistera toujours, et tous les termes du second membre disparaîtront, excepté $A\frac{f(x)}{x-a}$. Pour savoir ce qu'il devient, on pourrait faire d'abord la division par $x - a$, puis faire $x = a$ dans le quotient entier. Mais il vaut mieux traiter la fraction $\frac{f(x)}{x-a}$ d'après la règle relative aux fractions qui se réduisent à $\frac{0}{0}$; et l'on voit alors qu'elle se réduit à $f'(a)$.

Ainsi l'hypothèse $x = a$ réduit l'identité à la formule suivante :

$$F(a) = Af'(a), \quad \text{d'où} \quad A = \frac{F(a)}{f'(a)};$$

et comme $f'(a)$ n'est pas nul, puisque a n'est pas une racine multiple, il est toujours possible de déterminer A de manière à ce que l'équation (1) ait lieu pour $x = a$.

On voit de même qu'en prenant

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)}, \ldots, \quad L = \frac{F(l)}{f'(l)},$$

l'équation (1) sera satisfaite par $x = b$, $x = c, \ldots, x = l$. Il reste à en déduire la preuve de l'identité (1); car il est très-important d'observer, en général, qu'il ne suffit pas d'avoir trouvé des valeurs pour les coefficients indéterminés, lorsque l'on n'a pas prouvé d'avance la possibilité

du développement. Or on sait que quand deux fonctions entières de x sont égales pour un nombre de valeurs particulières de x, supérieur au degré du terme le plus élevé, elles sont égales, terme pour terme. Donc les deux membres de l'équation (1) sont rendus identiques par les valeurs trouvées pour A, B, C,..., L, puisqu'ils sont égaux pour les diverses valeurs a, b, c,..., l, dont le nombre surpasse d'une unité le degré du terme le plus élevé.

312. S'il y avait des racines imaginaires, rien ne serait changé dans les raisonnements précédents. Les constantes qui se rapporteraient à deux racines conjuguées, ne différeraient l'une de l'autre que par le signe de $\sqrt{-1}$, et les deux fractions seraient de la forme

$$\frac{M - N\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{M + N\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut faire disparaître les imaginaires, on effectuera la somme de ces deux fractions, qui se réduira à

$$\frac{2M(x - \alpha) + 2\beta N}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

On agirait de même pour toutes les autres racines imaginaires.

313. Supposons maintenant que l'équation

$$f(x) = 0$$

ait à la fois des racines inégales et des racines égales; soit a l'une quelconque de ces dernières, et

$$f(x) = (x - a)^m \varphi(x),$$

le polynôme $\varphi(x)$ n'admettant plus le facteur $(x - a)$;

posons

$$(1)\quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

on, en multipliant par $f(x)$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x) = A\varphi(x) + A_1(x-a)\varphi(x) + A_2(x-a)^2\varphi(x) + \ldots \\ + A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x) + P(x-a)^m. \end{aligned} \right.$$

Le nombre des coefficients du polygone P, ajouté au nombre des constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, est égal au nombre des termes de cette équation, et il s'agit de les déterminer de manière à la rendre identique. Si l'on y fait $x = a$, on obtient

$$F(a) = A\varphi(a),$$

d'où l'on tirera la valeur de A. Différentiant l'équation (2) et faisant ensuite $x = a$, il vient

$$F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a).$$

Différentiant successivement la même équation et faisant ensuite $x = a$, on introduira à chaque fois un nouveau coefficient, et l'on pourra ainsi, au moyen de $m - 1$ différentiations, déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Les termes provenant de $P(x-a)^m$ disparaîtront tous par l'hypothèse $x = a$.

Cherchons la formule générale qui représente toutes ces équations successives, et, pour cela, différentions p fois l'équation (2).

Pour savoir ce qui reste de chacun des termes quand on fera $x = a$ après la différentiation, considérons le terme général $A_n(x-a)^n\varphi(x)$. On trouvera sa dérivée de l'ordre p au moyen de la formule connue

$$\frac{d^p(QR)}{dx^p} = Q^p R + pQ^{p-1}R' + \frac{p(p-1)}{1.2}Q^{p-2}R'' + \ldots + QR^p,$$

dans laquelle les exposants de Q et R sont des indices de différentiation. On aura ainsi

$$(3)\begin{cases}\dfrac{d^p[(x-a)^n\varphi(x)]}{dx^p} = n(n-1)\ldots(n-p+1)(x-a)^{n-p}\varphi(x)\\ \qquad\qquad +\dfrac{p}{1}n(n-1)\ldots(n-p+2)(x-a)^{n-p+1}\varphi'(x)\\ +\dfrac{p(p-1)}{1.2}.n(n-1)\ldots(n-p+3)(x-a)^{n-p+2}\varphi''(x)+\ldots(x-a)^n\varphi^p(x).\end{cases}$$

Si p est plus grand que n, les premiers termes auront des exposants négatifs, et on devra les omettre parce que leurs coefficients seront zéro; cela tient à ce que quand $(x-a)$ sera affecté de l'exposant zéro, il donnera zéro pour dérivée.

Voyons maintenant ce que devient le second membre de l'équation (3) quand on y fait $x=a$. Si l'on a $p<n$, il se réduit à zéro. Si l'on a $p=n$, il se réduit à son premier terme $n(n-1)\ldots 2.1\,\varphi(a)$. Enfin, si l'on a $p>n$, il faudra se borner à prendre le terme qui en a $p-n$ avant lui, parce qu'il aura zéro pour exposant; les précédents auraient donc un exposant négatif et doivent être omis, comme nous l'avons dit; et les suivants deviendront nuls quand on fera $x=a$. Le second membre de l'équation (3) se réduit donc alors à

$$p(p-1)\ldots(p-n+1)\varphi^{p-n}(a).$$

Donc l'équation (2), différentiée p fois en supposant $p<m$, donnera, pour $x=a$, en observant qu'il faut s'arrêter à $n=p$,

$$(4)\begin{cases}F^p(a)=A\varphi^p(a)+pA_1\varphi^{p-1}(a)+p(p-1)A_2\varphi^{p-2}(a)+\ldots\\ +p(p-1)\ldots(p-n+1)A_n\varphi^{p-n}(a)+\ldots+p(p-1)\ldots 2.1A_p\varphi(a).\end{cases}$$

Telle est l'équation générale qui, en donnant à p toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $m-1$ inclusivement,

fournira m équations, d'où l'on déduira successivement chacune des quantités A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Ces équations sont les suivantes :

$$(5)\left\{\begin{array}{l} F(a) = A\varphi(a), \\ F'(a) = A\varphi'(a) + A_1\varphi(a), \\ F''(a) = A\varphi''(a) + 2A_1\varphi'(a) + 2.1A_2\varphi(a), \\ F'''(a) = A\varphi'''(a) + 3A_1\varphi''(a) + 3.2A_2\varphi'(a) + 3.2.1A_3\varphi(a) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{m-1}(a) = A\varphi^{m-1}(a) + (m-1)A_1\varphi^{m-2}(a) + (m-1)(m-2)A_2\varphi^{m-3}(a) + \ldots \\ \qquad + (m-1)(m-2)\ldots 2.1A_{m-1}\varphi(a). \end{array}\right.$$

La première équation donne la valeur de A, et ce sera la seule inconnue si $m = 1$; la seconde fait ensuite connaître immédiatement A_1, la troisième A_2, et ainsi de suite jusqu'à A_{m-1} : et il n'y aura jamais impossibilité, parce que le coefficient du dernier terme n'étant jamais zéro, on trouvera toujours une valeur finie pour chaque inconnue.

Il reste à prouver que réciproquement, si l'on prend pour A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, les valeurs ainsi déterminées, on aura satisfait à l'identité (2). En effet, ces valeurs sont tirées des équations (5), qui expriment que l'hypothèse $x = a$ annule le polynôme suivant et ses $m - 1$ premières dérivées,

$$F(x) - A\varphi(x) - A_1(x-a)\varphi(x) - A_2(x-a)^2\varphi(x) \ldots \\ - A_{m-1}(x-a)^{m-1}\varphi(x).$$

Donc, d'après un théorème connu, ce polynôme est divisible par $(x-a)^m$ et peut être mis sous la forme $P(x-a)^m$, P étant un polynôme entier qu'il sera facile de connaître. Donc les identités (2) et (1) seront satisfaites.

Cela posé, on pourra traiter d'une manière semblable la fraction $\frac{P}{\varphi(x)}$ relativement à une autre racine multiple,

si elle en renferme, et continuer ainsi jusqu'à la dernière. La fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ sera donc décomposée en fractions dont les numérateurs seront indépendants de x, et dont les dénominateurs ne renfermeront respectivement qu'un seul facteur premier de $f(x)$, élevé à une puissance égale ou inférieure au degré de multiplicité de ce facteur.

De plus, il est facile de reconnaître que cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière; car si les constantes relatives à la racine a, par exemple, étaient susceptibles de plusieurs valeurs, on devrait les trouver toutes, soit que le calcul fût fait d'abord pour cette racine, ou pour toute autre. Or nous avons reconnu que les constantes $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ne pouvaient avoir chacune plus d'une valeur. Donc il n'est possible de décomposer la fraction que d'une seule manière en fractions simples de la forme proposée.

On conclut de là que pour les racines autres que la première a, il ne sera pas nécessaire de recommencer les calculs sur le polynôme P et les suivants. Il suffira de changer dans les équations (5) les quantités m, a et $\varphi(x)$, en celles qui se rapporteront à toute autre racine de l'équation $f(x) = 0$; car c'est ce que l'on obtiendrait en commençant successivement par chacune d'elles.

314. Les calculs précédents exigent que l'on forme le polynôme $\varphi(x)$ qui est le quotient de la division de $f(x)$ par $(x-a)^m$. On peut se dispenser de faire cette opération, et exprimer $\varphi(a)$, $\varphi'(a), \ldots, \varphi^{m-1}(a)$, au moyen des dérivées de la fonction $f(x)$ elle-même : on les substituera ensuite dans l'équation générale (4), de laquelle se tirent toutes les équations (5). Or, si l'on différentie les deux membres de l'équation

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

ils se réduiront à zéro par l'hypothèse $x = a$, si le nombre des différentiations est inférieur à m. Supposons-le donc égal à $m + p$, p étant un nombre entier et positif quelconque.

Il est inutile de répéter ici ce qui a été dit au sujet de l'équation (3), et l'on aura, en faisant $x = a$ dans les dérivées de l'ordre $m + p$,

$$f^{m+p}(a) = (m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)\varphi^p(a);$$

d'où

$$\varphi^p(a) = \frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)}.$$

L'équation (4) devient, par là,

$$F^p(a) = A\frac{f^{m+p}(a)}{(m+p)(m+p-1)\ldots(p+1)} + A_1\frac{f^{m+p-1}(a)}{(m+p-1)\ldots(p+1)}$$
$$+ A_2\frac{f^{m+p-2}(a)}{(m+p-2)\ldots(p+1)} + \ldots\ldots + A_p\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots(p+1)}.$$

Si l'on donne à p toutes les valeurs depuis o jusqu'à $m - 1$, on aura, pour déterminer $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, les m équations suivantes :

$$F(a) = A\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots 2\,1},$$

$$F'(a) = A\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots 2} + A_1\frac{f^m(a)}{m(m-1)\ldots 2},$$

$$F''(a) = A\frac{f^{m+2}(a)}{(m+2)\ldots 3} + A_1\frac{f^{m+1}(a)}{(m+1)\ldots 3} + A_2\frac{f^m(a)}{m\ldots 3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{m-1}(a) = A\frac{f^{2m-1}(a)}{(2m-1)\ldots m} + A_1\frac{f^{2m-2}(a)}{(2m-2)\ldots m} + \ldots + A_{m-1}\frac{f^m(a)}{m}.$$

315. Les calculs précédents peuvent s'appliquer aux racines imaginaires égales, aussi bien qu'aux racines réelles. Mais les réductions entre les termes homologues relatifs aux racines conjuguées ne donnent pas immédia-

tement des résultats aussi simples que le mode de décomposition que nous allons faire connaître.

Soient $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ deux racines multiples de l'ordre m de l'équation $f(x) = 0$, de sorte que l'on ait

$$f(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^m \varphi(x).$$

On posera

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m} + \frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{P}{\varphi(x)},$$

ou

$$F(x) = (Ax+B)\varphi(x) + (A_1x+B_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x) + \ldots$$
$$+ (A_{m-1}x+B_{m-1})[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}\varphi(x) + P[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m$$

Le nombre des coefficients indéterminés est égal au nombre des termes qu'il faut égaler de part et d'autre, en ayant égard à ceux du polynôme P. Mais nous nous proposons ici de déterminer seulement A, B, A_1, B_1, ..., A_{m-1}, B_{m-1}. Or, si l'on fait $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ dans la dernière équation et dans ses dérivées successives, chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres, à cause de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$; et, de plus, il s'introduira dans chaque nouvelle équation deux nouveaux coefficients inconnus. Ainsi, la première déterminera A et B, la seconde A_1 et B_1, et la $m^{ième}$, A_{m-1} et B_{m-1}.

Ces mêmes formules s'appliqueraient aux autres racines imaginaires égales, en changeant convenablement

$$\alpha, \quad \beta, \quad m, \quad \varphi(x).$$

On pourrait encore, comme dans le cas des racines réelles égales, se dispenser de former le quotient $\varphi(x)$, et faire dépendre sa valeur et celle de ses dérivées, pour $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, des valeurs que prennent, dans la même hypothèse, les dérivées de $f(x)$; mais les formules sont moins simples que dans le cas précédent.

316. Cela posé, revenons à l'intégration de la fonction $\frac{F(x)}{f(x)}dx$.

La décomposition de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$, d'après les procédés qui viennent d'être exposés, conduira à l'intégration d'expressions ayant respectivement l'une des formes suivantes :

$$\frac{A\,dx}{x-a},\quad \frac{A\,dx}{(x-a)^n},\quad \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Examinons-les successivement.

1°. La première donne immédiatement

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\,l(x-a)+C.$$

2°. On trouvera, pour la seconde,

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C.$$

3°. Pour la troisième, on la décomposera comme il suit :

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(A\alpha+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

La première de ces deux nouvelles fractions ayant pour numérateur le produit de A par la moitié de la différentielle du dénominateur, est la différentielle de

$$\frac{1}{2}\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Pour intégrer la seconde, on posera

$$x-\alpha=\beta z,\quad \text{d'où}\quad dx=\beta\,dz,$$

et elle devient

$$\frac{A\alpha+B}{\beta}\cdot\frac{dz}{1+z}.$$

ce qui est la différentielle de

$$\frac{A\alpha + B}{6} \text{ arc tang } z.$$

Donc

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{(x-\alpha)^2 + 6^2} = \frac{A}{2} l[(x-\alpha)^2 + 6^2] + \frac{A\alpha + B}{6} \text{ arc tang } \frac{x-\alpha}{6} + C.$$

4°. Quant à la dernière expression

$$\frac{(Ax + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n},$$

on la décomposera ainsi :

$$\frac{A(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n} + \frac{(A\alpha + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n}.$$

La première partie est la différentielle de

$$\frac{-A}{2(n-1)[(x-\alpha)^2 + 6^2]^{n-1}}.$$

Pour intégrer la seconde partie $\frac{(A\alpha + B)\,dx}{[(x-\alpha)^2 + 6^2]^n}$, on posera $x - \alpha = 6z$, et elle deviendra $\frac{A\alpha + B}{6^{2n-1}} \cdot \frac{dz}{(z^2+1)^n}$; tout sera donc réduit à intégrer $\frac{dz}{(z^2+1)^n}$; or on a identiquement

$$\frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1 + z^2 - z^2}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z^2+1)^{n-1}} - \frac{z^2}{(z^2+1)^n};$$

donc

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n}.$$

Mais l'intégration par parties donnera

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^n} = -\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

substituant dans la précédente, il vient

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}.$$

L'intégration étant ramenée à une autre semblable, mais dans laquelle l'exposant de z^2+1 est diminué d'une unité, on parviendra, par une suite de réductions analogues, à l'intégrale de $\frac{dz}{z^2+1}$, qui est arc tang z. On obtiendra ainsi la formule suivante :

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}}\left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \ldots + \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3}{(2n-4)(2n-6)\ldots 4.2}(z^2+1)^{n-2}\right]$$
$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3.1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4.2}\text{arc tang } z + C$$

Si l'on multiplie cette expression par $\frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}}$, et qu'on remplace z par $\frac{x-\alpha}{\beta}$, on aura l'intégrale indéfinie de

$$\frac{(A\alpha + B)dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n};$$

on connaîtra, par conséquent, celle de la fonction proposée

$$\frac{(Ax + B)dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}.$$

Ainsi, au moyen des méthodes qui viennent d'être exposées, on pourra intégrer toute expression algébrique rationnelle.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES IRRATIONNELLES.

317. *Radicaux du second degré.* — Il n'y a qu'un très-petit nombre de fonctions irrationnelles que l'on sache intégrer sous forme finie. Nous allons examiner celles dont l'intégration peut s'effectuer avec une certaine généralité.

Nous commencerons par les fonctions où la seule quantité irrationnelle est un radical du second degré, sous lequel se trouve un polynôme du second degré : du reste, ce radical peut être combiné algébriquement avec x, d'une manière quelconque.

Comme on peut faire passer hors du radical le coefficient du terme qui renferme x^2, nous pouvons représenter la différentielle proposée, par

$$F(x, \sqrt{a + bx \pm x^2})\, dx.$$

Pour intégrer cette expression, il suffira de remplacer x par une fonction d'une autre variable telle, que les quantités x, dx et $\sqrt{a + bx \pm x^2}$ soient rationnelles ; car on retombera dans la théorie précédente, qui donnera toujours le moyen d'effectuer l'intégration.

1°. Supposons que x^2 ait le signe $+$ sous le radical. On pourra poser

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z + x;$$

d'où

$$a + bx = 2zx + z^2, \quad bdx = 2zdx + 2xdz + 2zdz,$$

$$x = \frac{z^2 - a}{b - 2z}, \quad dx = -\frac{2(z^2 - bz + a)}{(b - 2z)^2},$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2 - bz + a}{2z - b}.$$

La différentielle proposée devient donc rationnelle par cette transformation. On aurait encore pu poser

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \sqrt{a} + xz;$$

il en résulterait

$$b + x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \quad dx = 2dz\sqrt{a} + z^2dx + 2xzdz,$$

$$x = \frac{2z\sqrt{a} - b}{1 - z^2}, \quad dx = 2\frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{(1 - z^2)^2}dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{1 - z^2}.$$

La différentielle proposée devient donc encore rationnelle; mais cette transformation aurait l'inconvénient d'introduire des imaginaires si a était négatif.

On peut encore employer une troisième transformation quand les racines du trinôme $a + bx + x^2$ sont réelles; ce qui aura toujours lieu dans le cas où la transformation précédente ne peut se faire en quantités réelles.

Soit

$$a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta),$$

α et β étant réels; posons

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha)z,$$

on en tirera

$$x - \beta = (x - \alpha)z^2, \quad dx = z^2dx + 2(x - \alpha)zdz,$$

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2}, \quad dx = \frac{2z(\beta - \alpha)}{(1 - z^2)^2}dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha)z}{1 - z^2}.$$

2°. Dans le cas où x^2 serait affecté du signe — sous le radical, on ne pourrait employer la première de ces trois transformations. On pourrait employer la seconde si a était positif. Enfin, si a était négatif, les racines du trinôme $a + bx - x^2$ seraient réelles, sans quoi le radical $\sqrt{a + bx - x^2}$ serait toujours imaginaire; alors on emploierait la troisième transformation qui n'exige que la réalité des racines du trinôme.

318. On pourrait encore rendre rationnelle une fonction algébrique qui renfermerait deux radicaux de la forme

$$\sqrt{a+x}, \quad \sqrt{b+x};$$

pour cela on poserait,

$$\sqrt{a+x} = z,$$

d'où

$$x = z^2 - a, \quad dx = 2zdz, \quad \sqrt{b+x} = \sqrt{z^2 + b - a}.$$

Substituant ces valeurs dans la fonction différentielle donnée, elle ne renfermera qu'un seul radical du second degré qui affectera une expression du second degré en z. On retombe ainsi dans le cas précédent.

319. Appliquons ces transformations à quelques cas particuliers.

Soit

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}};$$

posant

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x,$$

on en déduit

$$a + bx = -2xz + z^2, \quad dx = \frac{2(z-x)\,dz}{b + 2z},$$

$$\frac{dx}{z - x} = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{2dz}{b + 2z};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{dz}{\frac{1}{2}b+z} = \mathrm{l}\left(\tfrac{1}{2}b+z\right) + \mathrm{C}$$

$$= \mathrm{l}\left[\frac{b}{2} + x + \sqrt{a+bx+x^2}\right] + \mathrm{C}.$$

Dans le cas où l'on aurait $b = 0$, on trouverait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \mathrm{l}\left(x + \sqrt{a+x^2}\right) + \mathrm{C}.$$

320. Considérons maintenant

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}},$$

et posons

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{a} + xz,$$

d'où

$$b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2, \quad \frac{dx}{\sqrt{a}+xz} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \mathrm{C} - 2\,\mathrm{arc\,tang}\,z = \mathrm{C} - 2\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{\sqrt{a+bx-x^2}-\sqrt{a}}{x}.$$

Si les racines du trinôme $a + bx - x^2$ sont réelles, on peut employer la troisième transformation, et poser

$$\sqrt{a+bx-x^2} = (x-\alpha)z,$$

en supposant

$$x^2 - bx - a = (x-\alpha)(x-\beta).$$

On aura d'abord

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2, \quad -dx(1+z^2) = 2(x-\alpha)zdz,$$

$$\frac{dx}{(x-\alpha)z} = -\frac{2dz}{1+z^2};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C - 2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{6-x}{x-\alpha}}$$

$$= C - 2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{-2x+b+\sqrt{b^2+4a}}{2x-b+\sqrt{b^2+4a}}}$$

$$= C - \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)^2}}{\left(\frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}\right)} = C - \operatorname{arc\,cos} \frac{2x-b}{\sqrt{b^2+4a}}.$$

Dans le cas particulier où $b=0$, $a=1$, cette dernière formule donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - \operatorname{arc\,cos} x = C' + \operatorname{arc\,sin} x.$$

L'autre transformation donnerait, dans ce cas,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = C - \operatorname{arc\,tang} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = C + \operatorname{arc\,sin} x,$$

résultat identique au précédent.

321. On a souvent à intégrer des expressions de la forme suivante :

$$\frac{(\alpha x+6)\,dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

On introduit alors au numérateur la différentielle de la quantité soumise au radical, et l'on décompose cette différentielle dans les deux suivantes :

$$\frac{\alpha\left(x-\frac{b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} + \frac{\left(6+\frac{\alpha b}{2}\right)dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}.$$

La première a pour intégrale $-x\sqrt{a+bx-x^2}$, et la seconde rentre dans le cas précédent.

322. La différentielle $\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$ peut être intégrée d'une manière plus simple que par les transformations que nous venons d'effectuer, en la ramenant à la forme $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, expression qui a pour intégrale arc sin z. En effet, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}\right)^2}};$$

donc

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+a}}+\text{C}.$$

323. *Fonctions de monômes irrationnels.* — Si l'on a une fonction algébrique rationnelle des quantités $x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}},\ldots, x^{\frac{r}{s}}$, il est facile de la rendre rationnelle, en même temps que dx; il suffira de poser $x=z^{nq\ldots s}$, on aura alors $dx=nq\ldots sz^{nq\ldots s-1}dz$, et tous les monômes $x^{\frac{m}{n}},\ldots, x^{\frac{r}{s}}$ seront rationnels en z.

CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIELLES BINOMES.

324. On désigne sous ce nom les expressions de la forme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$.

On peut toujours supposer m et n entiers; car s'ils étaient fractionnaires, la transformation indiquée dans le numéro précédent ramènerait à une expression semblable où les exposants de la variable seraient entiers. L'exposant p est fractionnaire; car s'il était entier, on développerait la puissance de $a+bx^n$, et l'on aurait à intégrer un nombre fini de monômes. Les signes de ces trois exposants sont arbitraires; mais on peut toujours supposer n positif: en effet, s'il était négatif, on pourrait multiplier le binôme $a+bx^n$ par x^{-n} et ajouter np à l'exposant de x^m, qui pourrait alors devenir fractionnaire, mais que l'on rendrait entier par la transformation déjà indiquée. On peut donc toujours supposer m et n entiers et n positif.

Nous emploierons d'abord la méthode de substitution, et nous poserons $a+bx^n=z$, d'où

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

et, par suite,

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{nb}\,z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Donc si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif ou négatif, l'expression en z n'aura plus d'irrationnel que le mo-

nôme z^p, et on la rendra rationnelle par le procédé indiqué dans le numéro précédent. Si, par exemple, on a $p = \frac{r}{q}$, on posera $z = t^q$, ce qui revient à faire d'abord $a + bx^n = t^q$.

L'intégrabilité de la différentielle proposée est donc assurée quand $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, quelles que soient d'ailleurs les deux quantités m et n.

325. On peut arriver à un autre cas d'intégrabilité en mettant la différentielle donnée sous la forme

$$x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p\, dx$$

En effet, si l'on applique la condition qui vient d'être trouvée en général, on trouve qu'on pourra l'intégrer si $\frac{m + np + 1}{-n}$ est un nombre entier, ou si $\frac{m+1}{n} + p$ est entier; condition qui pourra quelquefois être remplie quand la première ne le sera pas.

326. On peut appliquer l'intégration par parties à la même différentielle $x^m\,(a + bx^n)^p\, dx$, en considérant $x^{n-1}\,(a + bx^n)^p\, dx$ comme une différentielle exacte, dont l'intégrale est

$$\frac{1}{nb\,(p+1)}(a + bx^n)^{p+1}.$$

On obtiendra ainsi

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx = \int x^{m-n+1}\, x^{n-1}(a + bx^n)^p\, dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a + bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)} - \frac{m - n + 1}{nb\,(p+1)}\int x^{m-n}(a + bx^n)^{p+1}\, dx.$$

Mais

$$x^{m-n}(a + bx^n)^{p+1} = ax^{m-n}(a + bx^n)^p + bx^m(a + bx^n)^p;$$

donc, en substituant, on aura

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$
$$-\frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m (a+bx^n)^p dx.$$

Si l'on réduit le dernier terme de cette équation avec l'expression semblable qui se trouve dans le premier membre, on obtiendra la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} \\ &\qquad -\frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx. \end{aligned}\right.$$

On est ainsi ramené à intégrer une différentielle du même genre que la première, et qui n'en diffère qu'en ce que l'exposant m est changé en $m-n$.

1°. Supposons que m soit positif et plus grand que n. En traitant cette nouvelle différentielle de la même manière que la précédente, on diminuera encore de n l'exposant de x; et en continuant ainsi, l'on sera ramené, après un nombre k d'intégrations, à la différentielle $x^{m-kn}(a+bx^n)^p\,dx$, et l'on effectuerait immédiatement l'intégration si l'on avait

$$m-kn = n-1, \quad \text{ou} \quad \frac{m+1}{n} = k+1.$$

Ce procédé conduira donc à l'intégrale cherchée toutes les fois que $m+1$ sera divisible par n. C'est le premier cas d'intégrabilité que nous avions reconnu.

2°. Si m était négatif, la formule (1) ramènerait la différentielle proposée à une autre moins simple, puisque l'exposant du facteur monôme y aurait une valeur numériquement plus grande. Mais si l'on tire de cette même équation la valeur de la seconde intégrale en fonction de

la première, on aura une formule qui, dans le cas de l'exposant négatif, ramènera l'intégration proposée à une plus simple. Si en même temps on change $m - n$ en $-m$, on aura la formule suivante :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int x^{-m}(a+bx^n)^p\,dx = &-\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a} \\ &-\frac{b(m-np-n-1)}{(m-1)a}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p\,dx. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de cette formule on abaissera l'exposant $-m$, puisqu'on le ramène à $-m+n$, et que n peut toujours être supposé positif. En continuant ainsi, l'on arrivera à l'exposant $-m+kn$; et l'on pourra intégrer si l'on a

$$-m+kn = n-1, \quad \text{ou} \quad \frac{-m+1}{n} = 1-k.$$

Cette condition ramène encore au premier cas d'intégrabilité.

Lorsque la différentielle ne rentre pas dans ce cas, les formules (1) et (2) ramènent toujours l'exposant m à une valeur positive plus petite que n.

Les formules (1) et (2) ne peuvent être employées, la première lorsque l'on a $m+np+1=0$, la seconde lorsque $m=1$, parce qu'alors l'intégrale cherchée disparaît, et l'équation qui subsiste ne peut plus, par conséquent, en donner la valeur. Mais dans chacun de ces cas, l'une des conditions d'intégrabilité est satisfaite, et la différentielle devient rationnelle par la substitution que nous avons faite en premier lieu.

327. La manière dont nous avons fait usage de l'intégration par parties, avait pour objet de réduire l'exposant de x en dehors de la parenthèse. Mais on pourrait

la diriger de manière à réduire l'exposant du binôme $(a + bx^n)$.

En effet, si l'on considère $x^m dx$ comme différentielle, on trouvera

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m + 1} - \frac{npb}{m + 1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx.$$

Dans cette dernière intégrale on peut abaisser l'exposant $m + n$ sans changer l'exposant $p - 1$, par le procédé employé dans le n° 326, et l'on obtiendra ainsi

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m + np + 1} \\ &+ \frac{anp}{m + np + 1} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned} \right.$$

Cette formule deviendrait illusoire dans le cas déjà examiné, où l'on aurait

$$m + np + 1 = 0.$$

En appliquant le même calcul à la différentielle

$$x^m (a + bx^n)^{p-1} dx,$$

on abaissera d'autant d'unités que l'on voudra l'exposant de $(a + bx^n)$, dans le cas où p sera positif, et l'on parviendra à un exposant compris entre 0 et 1. Celui du facteur x^m est resté le même; mais on pourra le réduire ensuite comme on l'a indiqué précédemment : et si la différentielle ne devient pas intégrable, elle sera du moins simplifiée le plus possible.

Si p est négatif, on tirera de l'équation (3) la valeur de la dernière intégrale, qui se trouvera ramenée à une plus simple. Changeant p en $-p$, pour expliciter son signe,

puis mettant p au lieu de $p+1$, on obtient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^{-p}\,dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)}\\ &\quad -\frac{(m-np+n+1)}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Cette formule ne deviendra illusoire que dans le cas où $p=1$. Mais alors la différentielle proposée est rationnelle, à moins que m ne soit fractionnaire; et, dans ce cas, on emploierait une transformation déjà indiquée.

Au moyen de la formule (4), l'exposant négatif $-p$ peut être successivement augmenté d'autant d'unités que l'on voudra, et sera ramené à être compris entre 0 et $+1$. On pourra ensuite réduire l'exposant de x^m sans changer celui qui affectera le binôme $(a+bx^n)$.

328. Prenons d'abord pour exemple la différentielle $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dans laquelle m désigne un nombre entier positif. Elle est toujours intégrable; car on a

$$n=2,\quad p=-\frac{1}{2}.$$

Donc si $\frac{m+1}{n}$ n'est pas entier, $\frac{m+1}{n}+p$ le sera. Si on lui applique la formule (1), ou si on l'intègre directement par parties, on trouvera

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'exposant m étant ainsi abaissé de deux unités, on arrivera, en continuant d'appliquer le même procédé, à l'une des deux expressions $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, suivant

que m sera impair ou pair; la première a pour intégrale $-\sqrt{1-x^2}$; et la seconde, arc sin x.

On parvient ainsi à la formule suivante, dans le cas de m impair,

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right] + C.$$

On trouverait, dans le cas de m pair,

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\right] + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{m(m-2)(m-4)\ldots 2}\text{arc sin}\,x + C.$$

Si l'on supposait l'exposant négatif et représenté par $-m$, la formule de réduction serait la suivante :

$$\int \frac{x^{-m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le seul cas où elle ne puisse être appliquée est celui où $m=1$; il s'agit alors d'intégrer $\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. On pourra employer pour cela la transformation relative aux radicaux du second degré, et poser

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + xz;$$

d'où

$$-x = 2z + xz^2, \quad -dx = 2\,dz + 2xz\,dz + z^2\,dx,$$

$$\frac{dx}{1+xz} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2\,dz}{1+z^2}, \quad \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{dz}{z}.$$

Donc

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = lz + C = l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + C.$$

On serait arrivé plus simplement au même résultat, en posant $x = \frac{1}{z}$, ce qui aurait donné $\frac{-dz}{\sqrt{z^2-1}}$, que nous avons intégré précédemment.

La différentielle $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ s'intégrera de même en posant $x = \frac{1}{z}$. Elle devient

$$\frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} \text{ ou } d.\text{arc}\cos z;$$

donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc}\cos\frac{1}{x} + \text{C}.$$

On traitera de la même manière la différentielle $\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, et l'on y ramènerait la suivante $\frac{dx}{x}\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ en multipliant et divisant par le radical.

On trouvera ainsi :

$$\int \frac{dx}{x}\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+x^2} - a\,\text{l}.\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} + \text{C};$$

$$\int \frac{dx\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \sqrt{a^2-x^2} - a\,\text{l}.\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + \text{C}.$$

329. Considérons encore la différentielle binôme $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, qui se rencontre dans le calcul des oscillations du pendule. On a identiquement

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \int \frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{a}{2}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Mais, en intégrant par parties, on trouve

$$\int \frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\,dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax-x^2)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)a\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

substituant dans la première équation, et réduisant, il vient

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{2m}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

L'exposant m étant abaissé d'une unité, si l'on applique le même procédé à la nouvelle différentielle et aux suivantes, on parviendra enfin à $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. On obtiendra cette dernière en observant que

$$\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}} = \frac{\frac{2}{a}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2x}{a}\right)^2}};$$

donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{a-2x}{a} + C.$$

Si m était négatif, la formule ci-dessus, résolue par rapport à l'intégrale qui est dans le second membre, servirait de même à l'abaissement de l'exposant jusqu'à zéro.

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES, LOGARITHMIQUES, ET CIRCULAIRES.

330. Si l'on sait intégrer la différentielle $F(x)\,dx$, on saura aussi intégrer les suivantes, par une simple substitution :

$$F(e^x)\,e^x\,dx,\quad F(lx)\frac{dx}{x},\quad F(\sin x)\cos x\,dx,$$

$$F(\cos x)\sin x\,dx,\quad F(\text{arc}\sin x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$F(\text{arc}\cos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad F(\text{arc tang}\,x)\frac{dx}{1+x^2}.$$

On voit de même que si F désigne une fonction algébrique, on rendra algébriques les différentielles

$$F(e^x)\,dx,\quad F(\sin x,\cos x)\,dx,$$
$$F(\sin x,\sin 2x,\ldots,\cos x,\cos 2x,\ldots)\,dx,$$

en posant respectivement

$$e^x = z,\quad \sin x = z,\quad \text{ou}\quad \cos x = z.$$

331. Soit maintenant la différentielle $Pz^n\,dx$, dans laquelle z désigne une fonction transcendante.

Si l'on pose

$$\int P\,dx = Q,\quad \int Q\frac{dz}{dx}\,dx = R,\quad \int R\frac{dz}{dx}\,dx = S,\ldots$$

et que l'on puisse obtenir les fonctions désignées par

Q, R, S, etc., l'intégration par parties fera connaître $\int P z^n dx$. En effet, on aura

$$\int P z^n dx = Q z^n - n \int Q z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx,$$

$$\int Q z^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = R z^{n-1} - (n-1) \int R z^{n-2} \frac{dz}{dx} dx,$$

et ainsi de suite. Donc

$$\int P z^n dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} - \ldots$$

332. Si l'on suppose $P = 1$ et que l'on fasse successivement $z = lx$, $z = \text{arc} \sin x$, on trouvera

$$\int l^n x dx = x [l^n x - n l^{n-1} x + n(n-1) l^{n-2} x - \ldots \pm n(n-1) \ldots 2.1] + C,$$

$$\int (\text{arc} \sin x)^n dx = \left[\begin{array}{l} x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc} \sin x} - \frac{n(n-1)x}{(\text{arc} \sin x)^2} \\ - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc} \sin x)^3} + \ldots \end{array} \right] (\text{arc} \sin x)^n + C.$$

Si l'on suppose $P = x^{m-1}$ et $z = lx$, on aura

$$\int x^{m-1} l^n x dx = \frac{x^m}{m} \left[l^n x - \frac{n}{m} l^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{m^2} l^{n-2} x - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{m^n} \right] + C.$$

Si, dans la première et la dernière de ces trois formules, on pose $lx = z$, elles deviennent

$$\int z^n e^z dx = e^z [z^n - n z^{n-1} + n(n-1) z^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 2.1] + C,$$

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a} \left[z^n - \frac{n}{a} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^2} z^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n} \right] + C;$$

si, dans la seconde, on pose $\text{arc} \sin x = z$, d'où

$$x = \sin z, \quad dx = \cos z dz,$$

elle devient

$$\int z^n \cos z dz = \sin z [z^n - n(n-1) z^{n-2} + \ldots]$$
$$+ \cos z [n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} + \ldots] + C.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement ces trois dernières

formules, et en déduire réciproquement les trois premières.

333. Les deux intégrales $\int e^{ax}\cos bx dx$ et $\int e^{ax}\sin bx dx$ peuvent se déterminer à la fois, au moyen de l'intégration par parties. En effet, on trouve immédiatement

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

De ces deux équations on tire, pour ces intégrales, les valeurs suivantes :

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

334. On pourra encore déterminer les intégrales

$$\int x^n e^{ax}\cos bx dx, \quad \int x^n e^{ax}\sin bx dx,$$

en abaissant successivement l'exposant de x. Mais le calcul sera simplifié au moyen de la formule ci-dessus, qui donne la valeur de $\int z^n e^{az} dz$, dans laquelle on remplacera a par $a + b\sqrt{-1}$. Elle devient alors, en substituant x à z,

$$\int x^n e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)dx =$$

$$\frac{e^{ax}(\cos bx + \sqrt{-1}\sin bx)}{a+b\sqrt{-1}}\left[x^n - \frac{nx^{n-1}}{a+b\sqrt{-1}} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(a+b\sqrt{-1})^n}\right] + C.$$

Si l'on égale les parties réelles des deux membres, ainsi que les parties imaginaires, on aura les valeurs des deux intégrales cherchées.

335. Considérons maintenant les différentielles de la forme

$$\sin^m x \cos^n x dx.$$

Si l'on pose $\sin x = z$, d'où $\cos x dx = dz$, on obtient

$$z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz.$$

Elle rentre ainsi dans les différentielles binômes, et sera intégrable lorsque $\frac{m+1}{2}$ sera entier, c'est-à-dire lorsque m sera un nombre entier impair, ou lorsque n sera un nombre entier impair, ou lorsque $m + n$ sera un nombre entier pair. On aurait pu poser $\cos x = z$, et la différentielle serait devenue

$$-z^n (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz,$$

d'où l'on aurait tiré les mêmes conséquences.

336. Au lieu d'employer ces transformations, on peut traiter directement la différentielle proposée, au moyen de l'intégration par parties. On trouvera ainsi

$$(1) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m-1} \int \sin^{m+2} \cos^{n-2} x dx.$$

Or

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n+2} x dx = \int (\sin^m x \cos^{n-2} x)(1 - \cos^2 x) dx$$
$$= \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m dx \cos^n x dx;$$

substituant et réduisant, il vient

$$(2) \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

Donc, si n est positif, cette formule l'abaisse de deux unités, sans changer m; excepté toutefois le cas où $m + n = 0$, que nous examinerons plus tard.

En supposant que ce cas ne se présente pas jusqu'à la fin du calcul, et en continuant de diminuer l'exposant de $\cos x$, on le ramènera à 0 ou 1 s'il est entier.

337. En dirigeant autrement l'intégration par parties, on abaissera successivement l'exposant de $\sin x$. En effet, on a

$$(3)\quad \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+1} x dx,$$

Or

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+1} x dx = \int (\sin^{m-2} x \cos^n x)(1 - \sin^2 x)\, dx$$
$$= \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx.$$

Substituant dans la précédente, et réduisant, il vient

$$(4)\quad \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx.$$

Si donc on excepte encore le cas de $m + n = 0$, on abaissera l'exposant de $\sin x$ d'un nombre pair quelconque, et, s'il est entier, on parviendra à le réduire à zéro ou à l'unité sans que l'exposant de $\cos x$ ait changé. S'ils sont tous deux entiers, on les réduira successivement l'un et l'autre, autant que possible, sans les rendre négatifs, et il restera à intégrer une des expressions suivantes :

$$\int dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \sin x \cos x dx,$$

que nous considérerons tout à l'heure.

338. Supposons maintenant que m étant positif, n soit négatif et remplacé par $-n$; la formule (2) donnera

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(m-n)\cos^{n+1} x} - \frac{n+1}{m-n} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n+2} x} dx.$$

L'exposant des $\cos x$ se trouvant élevé de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale qui est dans le second mem-

bre, et l'on trouvera, en changeant $n+2$ en n,

$$(5)\quad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}\,dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée dans le cas de $n=1$. Si en même temps m est entier, on l'abaissera au moyen de la formule (4), et l'on parviendra à

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx, \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

expressions que nous intégrerons tout à l'heure.

339. Si, au contraire, n est positif et m négatif, remplaçons-le par $-m$ dans la formule (4), elle devient

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = \frac{\cos^{n+1} x}{(m-n)\sin^{m+1} x} + \frac{m+1}{m-n}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m+2} x}\,dx.$$

L'exposant de $\sin x$ étant augmenté de deux unités, on tirera la valeur de l'intégrale du second membre, et l'on aura, en remplaçant $m+2$ par m,

$$(6)\quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\,dx = \frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\,dx.$$

Cette formule ne peut être appliquée si $m=1$; mais alors, en abaissant l'exposant de $\cos x$, on arrivera, s'il est entier, à l'une des expressions $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$, ou $\int \frac{dx}{\sin x}$.

340. Supposons enfin que m et n soient négatifs tous les deux, et remplaçons-les par $-m$ et $-n$. La formule (2) deviendra

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m+n)\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x} + \frac{n+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n+2} x},$$

ou, en tirant la valeur de la seconde intégrale, et chan-

geant $n+2$ en n,

$$(7)\quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}.$$

On tirera semblablement de la formule (4)

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(m+n)\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+1}{m+n}\int \frac{dx}{\sin^{m+2} x \cos^n x}.$$

Tirant de là la valeur de la dernière intégrale, et remplaçant $m+2$ par m, il vient

$$(8)\quad \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{-1}{(m-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}.$$

Au moyen des formules (7) et (8) on diminuera du plus grand nombre pair possible les exposants de $\sin x$ et $\cos x$. Il n'y aura d'exception que pour le cas de $m=1$ ou $n=1$, et alors on parvient, en supposant m et n entiers, à l'une des expressions suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

341. En réunissant les cas particuliers auxquels on est conduit par l'application de ces procédés, on voit que l'on est toujours ramené, quand les exposants sont entiers, à effectuer l'une des intégrations suivantes :

$$\int dx, \int \cos dx, \int \sin x dx, \int \sin x \cos x dx, \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x} dx, \int \frac{\cos^m x}{\sin^m x} dx.$$

Les six premières s'obtiennent immédiatement, et ont pour valeurs respectives

$$\int dx = x + C, \quad \int \cos dx = \sin x + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Dans les deux suivantes le numérateur est la différentielle du dénominateur, abstraction faite du signe. Donc

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\mathrm{l}\cos x + \mathrm{C}, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \mathrm{l}\sin x + \mathrm{C}.$$

On intégrera la suivante $\frac{dx}{\sin x \cos x}$ en divisant ses deux termes par $\cos^2 x$; elle devient alors

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{\mathrm{tang}\,x} = \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,x + \mathrm{C}.$$

La suivante $\frac{dx}{\sin x}$ s'intégrera en divisant ses deux termes par $\cos^2 \frac{1}{2}x$, après avoir remplacé $\sin x$ par $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; elle devient alors

$$\int \frac{\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}} = \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2} + \mathrm{C}.$$

On ramènera l'intégrale $\int \frac{dx}{\cos x}$ à cette dernière, en observant que

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}$$
$$= \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}.$$

342. Il ne reste plus à intégrer que les deux expres-

sions $\frac{\sin^n x}{\cos^n x}\,dx$ et $\frac{\cos^n x}{\sin^n x}\,dx$, qui rentrent l'une dans l'autre par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$.

Or la formule (1) devient, en supposant n négatif et égal à $-m$,

$$\int \tang^m x dx = \frac{\tang^{m+1} x}{m+1} - \int \tang^{m+2} x dx,$$

et l'on en tirera, en remplaçant $m+2$ par m,

$$\int \tang^m x dx = \frac{\tang^{m-1} x}{m-1} - \int \tang^{m-2} x dx.$$

En continuant à abaisser l'exposant de deux unités, on parviendra à $\int dx$, ou $\int \tang x dx$, qui a été déterminée précédemment, puisqu'elle n'est autre chose que $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$. On aurait trouvé de même

$$\int \cot^m x dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x dx.$$

Cette formule ramènera, soit à $\int dx$, soit à $\int \cot x dx$, qui a été déjà déterminée, quand on a cherché $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$.

343. En appliquant les principes précédents à la détermination des intégrales

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \tang^n x dx,$$

$$\int \cot^n x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x},$$

Digitized by Google

on trouve, 1° en supposant n pair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \tang^n x dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1} - \frac{\tang^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \tang x \mp x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \ldots \pm \cot x \mp x + C,$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\sec x\right] + C,$$

$$\int \cosec^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\cosec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\cosec^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-2)}{1.3\ldots(n-3)}\cosec x\right] + C;$$

2°. En supposant n impair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\int \tang^n x dx = \frac{\tang^{n-1}x}{n-1} - \frac{\tang^{n-3}x}{n-3} + \ldots \pm \frac{\tang^2 x}{2} \pm \mathrm{l}\cos x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} + \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \mathrm{l}\sin x + C,$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\sec^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\mathrm{l}\tang\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int \cosec^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\cosec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\cosec^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\cosec^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\mathrm{l}\tang\frac{x}{2} + C.$$

344. Observons qu'il est quelquefois plus simple de

réduire les différentielles de la forme $\frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, en les multipliant une ou plusieurs fois de suite par $\sin^2 x + \cos^2 x$, ce qui n'en change pas la valeur. Par exemple $\frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ se changera en $\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{dx}{\sin^2 x}$ dont l'intégrale est $\tang x - \cot x + C$.

Remarquons encore que l'on pourra quelquefois, avec avantage, remplacer les puissances du sinus et du cosinus de x par leurs développements en fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples de x.

Nous terminerons par l'intégration de deux expressions qui se rencontrent souvent.

La première est $\frac{dx}{a + b\cos^2 x + c\sin^2 x}$. On l'intègre en posant $\tang x = z$, et l'on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \text{arc tang.} z \sqrt{\frac{a+c}{a+b}} + C.$$

Si $a + c$ et $a + b$ ne sont pas de même signe, cette expression se change en logarithme.

La seconde est $\frac{dx}{a + b\cos x}$; elle se ramène à la première en remplaçant $\cos x$ par $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, et l'on posera alors $\tang \frac{x}{2} = z$.

CHAPITRE VII.

INTEGRATION PAR SÉRIES.

345. Lorsqu'on ne peut intégrer exactement une différentielle $F(x)\,dx$, on peut se proposer de développer son intégrale en séries; et pour cela on développera d'abord la fonction $F(x)$. Soit donc

$$(1)\qquad F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et admettons que cette série soit convergente, sans quoi elle ne pourrait remplacer aucune fonction.

Soient s_n la somme des termes jusqu'à u_n inclusivement, et r_n le reste de la série, qui tend vers zéro à mesure que n augmente. On aura

$$F(x) = s_n + r_n.$$

Intégrons les deux membres de cette équation entre deux valeurs quelconques x_0 et X, nous aurons

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} s_n\,dx + \int_{x_0}^{X} r_n\,dx;$$

et puisque r_n tend vers zéro, $\int_{x_0}^{X} r_n\,dx$ tend aussi vers zéro; donc

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{X} s_n\,dx = \int_{x_0}^{X} u_0\,dx + \int_{x_0}^{X} u_1\,dx + \ldots,$$

ou, en remplaçant X par x,

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \ldots.$$

L'équation subsistera évidemment en prenant les intégrales indéfinies

$$\int F(x)dx = \int u_0 dx + \ldots.$$

346. Si la série (1) n'était pas convergente, pour la limite X, on pourrait craindre que la formule (2) ne fût inexacte; mais nous allons voir qu'elle subsiste encore, pourvu qu'elle soit convergente. En effet, elle est démontrée pour toute valeur de x comprise entre x_0 et X; c'est-à-dire que l'on a pour ces valeurs

$$\int_{x_0}^{x} F(x)dx = \int_{x_0}^{x} u_0 dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n dx + \ldots.$$

Or la limite de la somme des termes du second membre est une fonction déterminée de x, puisque la série des intégrales est supposée convergente, même pour la valeur X. Si donc on fait tendre x vers X, les deux membres de l'équation tendront chacun vers une limite, et ces limites ne peuvent être inégales. Donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots.$$

La même démonstration se ferait pour la limite x_0, et même pour toute valeur intermédiaire, pour laquelle la série (1) cesserait d'être convergente, sans que la série des intégrales cessât de l'être.

347. La fonction F (x) peut quelquefois être développée de bien des manières différentes en séries convergentes : on choisira celle qui conviendra le mieux à la question. Si on la développe suivant la formule de Maclaurin, on aura

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \ldots + F^m(0)\frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

et, par suite,

$$(3)\quad \int F(x)\,dx = C + F(0)\,x + F'(0)\frac{x^2}{1.2} + F''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + F^m(0)\frac{x^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots$$

Il est facile de reconnaître que ce second membre n'est autre chose que le développement de $\int F(x)\,dx$, d'après la formule de Maclaurin : C représente la valeur arbitraire de cette fonction pour $x = 0$.

Si l'on veut connaître l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque $F^{n-1}(0)\frac{x^n}{1.2\ldots n}$, dans la série (3), il suffira de multiplier $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ par la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de la fonction $\int F(x)\,dx$, en donnant à x dans cette dérivée une valeur θx intermédiaire entre 0 et x. C'est la règle connue dans le cas de la formule de Maclaurin, dont l'équation (3) est l'application à la fonction $\int F(x)\,dx$. Si donc on désigne par k la plus grande valeur de $F^n(x)$ quand x passe de 0 à x, l'erreur commise en s'arrêtant au terme qui renferme x^n sera moindre que $\frac{kx^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$.

348. On pourrait développer la fonction $\int F(x)\,dx$ par la formule de Bernoulli, qui donne pour une fonction quelconque y,

$$y = y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} - \ldots,$$

y_0 étant la valeur de y correspondant à $x = 0$. Si l'on suppose

$$y = \int F(x)\,dx, \quad \text{et} \quad y_0 = C,$$

on aura

$$(4)\quad \int F(x)\,dx = C + xF(x) - \frac{x^2}{1.2}F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}F''(x) - \ldots.$$

On obtiendrait cette même formule en intégrant par parties la différentielle $F(x)\,dx$. En effet, on aura successi-

vement :

$$\int F(x)\,dx = x\,F(x) - \int x\,F'(x)\,dx,$$

$$\int x\,F'(x)\,dx = \frac{x^2}{1.2}\,F'(x) - \int \frac{x^2}{1.2}\,F''(x)\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{1.2}\,F''(x)\,dx = \frac{x^3}{1.2.3}\,F''(x) - \int \frac{x^3}{1.2.3}\,F'''(x)\,dx.$$

Si, en continuant indéfiniment ces intégrations, la dernière intégrale tend vers zéro, on aura, en faisant les substitutions et ajoutant la constante arbitraire,

$$\int F(x)\,dx = C + x\,F(x) - \frac{x^2}{1.2}\,F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}\,F''(x) - \ldots,$$

ce qui n'est autre chose que la formule (4).

349. Lorsque la fonction $F(x)$ est le produit de plusieurs facteurs, on peut se borner à développer l'un d'eux en série, pourvu que les autres facteurs multipliés par les divers termes de cette série donnent des produits intégrables.

Soit, par exemple, la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}\,\sqrt{1 - bx}},$$

qui se rencontre dans le calcul du mouvement du pendule. On peut développer $(1 - bx)^{-\frac{1}{2}}$ si l'on suppose $bx < 1$, abstraction faite des signes, et l'on aura

$$(1 - bx)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \ldots.$$

Substituant ce développement dans la différentielle proposée, on aura à intégrer des termes de la forme

$$\frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

expression que nous avons intégrée dans la théorie des différentielles binômes.

350. L'intégration par séries peut servir à faire connaître les développements des fonctions dont on sait développer les dérivées.

Ainsi, par exemple, la dérivée de *arc sin* x est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont le développement est

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots;$$

donc

$$\text{arc sin}\, x = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Mais il faut remarquer que le radical ayant été pris positivement, on suppose que l'arc et le sinus varient dans le même sens. La formule ne s'applique donc pas aux arcs compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, mais elle convient aux arcs compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$, elle conviendrait de même aux arcs entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$. Elle doit, par conséquent, être satisfaite quand on y fait $x=0$, et, par suite, C doit être nul; on a donc

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est plus convergent pour $x=1$; mais, comme la série des intégrales ne cesse pas de l'être, la formule précédente représente *arc sin* x, même lorsque $x=1$. On a, pour cette valeur particulière,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots.$$

Mais cette série serait trop peu convergente pour servir à calculer π.

351. On aura de même le développement de *arc tang* x en développant $\frac{1}{1+x^2}$, qui en est la dérivée.

Si l'on suppose $x < 1$, on ordonnera par rapport aux puissances croissantes de x, afin que la série soit convergente, et l'on aura

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

L'arc étant nul avec sa tangente, on aura $C = 0$, et

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Si, au contraire, on a $x > 1$, on aura, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x,

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + \ldots;$$

donc

$$\text{arc tang } x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots.$$

La constante est $\frac{\pi}{2}$, puisque x infini rend le premier membre égal à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour les valeurs de x numériquement plus grandes que l'unité, on a

$$\text{arc tang } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}.$$

Il faut remarquer que la première formule donne les arcs positifs depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{4}$ seulement. La seconde ne convient qu'aux arcs compris entre cette limite et $\frac{\pi}{2}$ qui est la plus grande valeur du second membre.

Ces formules sont exactes pour $x = 1$, parce qu'elles restent convergentes, quoique les séries qui expriment la dérivée ne le soient plus; elles donnent alors

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

352. Cherchons encore de cette manière le développement de $l(1+x)$, dont la dérivée est $\frac{1}{1+x}$. Si l'on suppose $x < 1$, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots;$$

donc

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Le logarithme de l'unité étant zéro, il faut supposer $C = 0$ pour que la formule représente $l(1+x)$, et l'on aura

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

Cette formule étant convergente pour $x = 1$, quoique la série qui exprime la dérivée ne le soit plus, elle ne cesse pas d'être exacte pour cette valeur particulière.

Si l'on supposait $x > 1$, et qu'on ordonnât le développement de $\frac{1}{1+x}$ par rapport aux puissances décroissantes de x afin qu'il fût convergent, on ne trouverait plus $l(1+x)$, mais seulement $l(1+x) - l.x$, ou $l\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

CHAPITRE VIII.

PASSAGE DES INTÉGRALES INDÉFINIES AUX INTÉGRALES DÉFINIES.

353. Nous avons démontré, dans le n° 304, que si la dérivée d'une fonction quelconque $F(x)$ est continue pour toutes les valeurs de la variable depuis x_0 jusqu'à x, la différence $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des valeurs que prend $F'(x)\,dx$, lorsque l'on fait passer la variable de x_0 à x, par degrés infiniment petits représentés par dx; d'où résulte la formule

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Ainsi, pour connaître l'intégrale définie de $F'(x)\,dx$ entre des limites données, lorsque l'on connaît l'intégrale indéfinie, ou une fonction quelconque $F(x)$ ayant pour dérivée $F'(x)$, il suffit de substituer les limites de l'intégrale dans $F(x)$, et de retrancher le résultat relatif à la plus petite limite, de celui qui se rapporte à la plus grande.

Exemples :

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} dx = 1, \quad \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x dx = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2k}{(2i+1)(2i+3)\ldots(2i+2k+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x \sin^{2k} x dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)\,1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots(2i+2k)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)}.$$

Ces dernières intégrales rentrent dans deux des précédentes en posant $x = \sin z$; d'où $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$.

L'intégrale indéfinie de $\frac{x^{2m} dx}{x^{2n}+1}$ peut être déterminée en décomposant en fractions simples l'expression $\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, dans laquelle on peut toujours supposer $m < n$. D'après cela, si l'on fait $\frac{2m+1}{2n} = a$, on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n}\left[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \sin 5a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi\right] = \frac{\pi}{n \sin a\pi}.$$

On aura encore, en supposant que m et n soient des nombres entiers positifs, tels que $m < n$,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Si maintenant on pose $x^n = z$, $\frac{m}{n} = a$, cette équation devient $\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, a ayant une valeur commensurable quelconque comprise entre 0 et 1, et pouvant avoir aussi, par conséquent, toute valeur incommensurable comprise entre les mêmes limites.

On trouvera encore, d'après une formule précédemment démontrée, en supposant $n > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2}.$$

Il faut bien remarquer que la formule (1) ne subsisterait plus si la fonction $F(x)$ devenait infinie entre les limites de l'intégration. Dans ce cas, la somme des éléments $F'(x)\,dx$ peut être infinie, ou indéterminée. Il faudra donc toujours s'assurer si $F(x)$ ne devient pas infini dans cet intervalle, et c'est seulement lorsque cette circonstance ne se présentera pas, que l'on pourra dire que $F(x) - F(x_0)$ est la limite de la somme des éléments tels que $F'(x)\,dx$. Dans le cas contraire, on partage l'intégrale en deux autres ayant pour limite commune la valeur particulière de x, et l'on examine séparément chacune d'elles.

Si, par exemple, on cherche $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^4}$, la formule (1) donnera $-\frac{1}{3b^3} - \frac{1}{3a^3}$, expression qui est négative, tandis que tous les éléments sont positifs. Mais $\frac{1}{x^4}$ devenant infini pour $x = 0$, il faut s'assurer si l'intégrale ne le devient pas aussi. C'est ce qui arrive, en effet, et la formule (1) suppose que cette circonstance n'arrive pas.

Dans le cas actuel, les deux intégrales partielles sont

infinies de même signe; par conséquent il n'y a pas indétermination, et l'intégrale demandée est infinie.

Considérons encore l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$. Si les deux limites sont négatives, on a une somme d'éléments négatifs, qui seraient les mêmes, au signe près, que si l'on prenait ces limites positives. Ainsi l'on aura

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\, b - \mathrm{l}\, a = \mathrm{l}\, \frac{b}{a}.$$

Il n'y aurait de même aucune difficulté pour deux limites positives; mais si elles sont de signes différents, l'intégrale lx passant par l'infini, la formule (1) n'est plus démontrée; et il y a cela de remarquable, que la somme des éléments est réellement indéterminée.

En effet, soit l'intégrale définie $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$; partageons-la en deux autres, dont les limites soient $-a-\varepsilon\mu$ pour la première et $+\varepsilon\nu+b$ pour la seconde; ε étant une quantité qui tend vers zéro, et μ, ν deux nombres constants arbitraires. La première intégrale aura pour valeur $\mathrm{l}\, \frac{\varepsilon\mu}{a}$, et la seconde $\mathrm{l}\, \frac{\varepsilon\nu}{b}$; leur somme sera $\mathrm{l}\, \frac{\mu}{\nu} + \mathrm{l}\, \frac{b}{a}$. Elle ne renfermera plus ε, et, par conséquent, si l'on fait tendre cette quantité vers zéro, on aura pour la somme des deux intégrales, ou pour l'intégrale $\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x}$, la quantité indéterminée $\mathrm{l}\, \frac{b}{a} + \mathrm{l}\, \frac{\mu}{\nu}$, qui dépend du rapport arbitraire des intervalles infiniment décroissants $\varepsilon\mu$, $\varepsilon\nu$. Si on les suppose égaux, $\mathrm{l}\, \frac{\mu}{\nu}$ devient $\mathrm{l}\, 1$ ou zéro, et il reste $\mathrm{l}\, \frac{b}{a}$. C'est ce que M. Cauchy appelle la *valeur principale* de l'intégrale indéterminée.

354. Lorsque l'on applique l'intégration par parties à la transformation des intégrales définies, et qu'on donne les mêmes limites aux intégrales, il est facile de voir, en général, comment doit être déterminée la constante.

En effet, on a

$$\int f(x)\,d\varphi(x) = f(x)\varphi(x) - \int \varphi(x)\,df(x).$$

Si l'on veut que les intégrales soient prises entre les mêmes limites x_0 et X, on commencera par les prendre à partir de x_0; mais alors il est nécessaire d'ajouter une constante arbitraire à l'un des membres, ce qui donne

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,d\varphi(x) = C + f(x)\varphi(x) - \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,d.f(x).$$

Pour que cette équation ait lieu en faisant $x = x_0$, il faut que l'on ait $C = -f(x_0)\varphi(x_0)$, et, par conséquent,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,d.\varphi(x) = f(X)\varphi(X) - f(x_0)\varphi(x_0) - \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,d.f(x).$$

355. Si l'on renverse les limites d'une intégrale définie, on ne fait que changer son signe; car les accroissements de x changent de signe, et les valeurs absolues des éléments différentiels ne changent pas. On a donc

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = -\int_{X}^{x_0} F(x)\,dx,$$

ce qui s'accorde avec l'expression de l'intégrale définie au moyen de la fonction $\varphi(x)$ dont la dérivée est $F(x)$. En effet, on a

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0), \quad \int_{X}^{x_0} = \varphi(x_0) - \varphi(X),$$

expressions égales et de signes contraires.

356. On peut changer l'intégrale $\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$ dans la suivante :

$$\int_{x_0}^{X} F(X + x_0 - x)\,dx,$$

dont les limites sont les mêmes. En effet, les éléments qui les composent l'une et l'autre sont les mêmes en ordre inverse. En partant de cette remarque, qui est quelquefois utile, on peut, par une suite d'intégrations par parties, obtenir très-simplement la série de Taylor, comme on va le voir.

357. *Série de Taylor.* — Soit $F(x)$ une fonction quelconque qui reste continue, ainsi que ses n premières dérivées, entre les limites x et $x + h$. On a évidemment

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^h F'(x+z)\,dz;$$

et, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\int_0^h F'(x+z)\,dz = \int_0^h F'(x+h-z)\,dz:$$

x est constant dans cette intégration, z seul varie.

Intégrant par parties cette dernière expression et celles qui s'en déduisent, il vient

$$\int F'(x+h-z)\,dz = zF'(x+h-z) + \int zF''(x+h-z)\,dz$$
$$= zF'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2}F'''(x+h-z)\,dz = \ldots$$
$$= \frac{z}{1}F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z) + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x+h-z)$$
$$+ \int \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Si l'on prend les intégrales entre les limites o et h, il

faudra faire successivement $z = h$, $z = 0$ dans les termes en dehors du signe $\int$, puis retrancher le dernier résultat du premier, ce qui donnera

$$\int_0^h F'(x+h-z)\,dz = hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$+ \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Mais

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^h F'(x+h-z)\,dz;$$

donc

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}F^n(x+h-z)\,dz.$$

Lorsque le terme qui renferme l'intégrale définie tend vers zéro à mesure que n augmente, la série converge vers $F(x+h)$, et devient celle que Taylor a fait connaître.

On peut donner une autre forme au terme qui exprime l'erreur commise, en s'arrêtant au terme de rang n. En effet, l'intégrale définie est égale à la somme des facteurs $z^{n-1}\,dz$, multipliée par une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande de celles que prend $F^n(x+h-z)$ quand z passe de 0 à h; et comme cette fonction est supposée continue dans cet intervalle, cette moyenne est l'une des valeurs que prend $F^n(x+h-z)$, pour une certaine valeur de z comprise entre 0 et h : d'où résulte aussi pour $h-z$ une valeur comprise entre 0 et h, que nous représenterons par θh. Le terme qui complète le développement devient donc

$$\frac{F^n(x+\theta h)}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}\,dz, \quad \text{ou} \quad \frac{h^n}{1.2\ldots n}F^n(x+\theta h).$$

C'est sous cette forme que nous l'avons présentée dans le Calcul différentiel : θ est une fonction inconnue de x, et l'on sait seulement qu'elle a une valeur positive plus petite que l'unité.

En prenant la plus petite et la plus grande des valeurs de $F^n(x)$ dans l'intervalle de x à $x+h$, on aura deux limites entre lesquelles sera comprise l'erreur commise en s'arrêtant après le $n^{ième}$ terme. L'intégrale définie donne la valeur exacte de cette erreur ; mais elle présente la difficulté de l'intégration, et l'on ne peut généralement se proposer que de la renfermer entre deux limites connues.

Différentiation et intégration sous le signe $\int$.

358. Nous avons fait connaître, au commencement de ce Cours, les règles pour différentier les fonctions explicites, ainsi que celles qui sont liées entre elles et avec la variable principale par des équations dont les deux membres sont des fonctions explicites. Nous allons considérer une autre espèce de fonction et donner le moyen de la différentier.

Soit la fonction $u = \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\, dz$ que l'on se propose de différentier par rapport à x; les limites z_0, Z, pouvant être des fonctions quelconques de x.

On aura, en considérant cette intégrale comme une fonction composée de z_0, Z, x, qui sont toutes des fonctions de x,

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dz_0}\right)\frac{dz_0}{dx} + \left(\frac{du}{dZ}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or on a d'abord

$$\frac{du}{dz_0} = -F(z_0, x), \quad \frac{du}{dZ} = F(Z, x).$$

Quant au troisième terme $\frac{du}{dx}$, qui est relatif à la supposition de z_0 et Z constants, il est la limite de

$$\frac{\int_{z_0}^{Z} F(z, x+h)\,dz - \int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz}{h},$$

ou de

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z, x+h) - F(z, x)}{h}\,dz,$$

et a pour valeur

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz.$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz = F(Z, x)\frac{dZ}{dx} - F(z_0, x)\frac{dz_0}{dx} + \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz.$$

On parviendrait très-simplement à la même formule, en considérant l'intégrale définie comme représentant l'aire d'une courbe.

Si les limites sont constantes, c'est-à-dire indépendantes de x, on a

$$\frac{d}{dx}\int_{z_0}^{Z} F(z, x)\,dz = \int_{z_0}^{Z} \frac{dF(z, x)}{dx}\,dz;$$

on voit qu'alors les deux opérations de différentiation et d'intégration peuvent se faire dans un ordre quelconque.

359. Si la fonction de x était une intégrale indéfinie par rapport à z, on la mettrait sous la forme

$$u = \int_{z_0}^{z} F(z, x)\,dz + C,$$

C étant une fonction quelconque de x ; d'où

$$\frac{du}{dx} = \int_{z_0}^{z} \frac{dF(z, x)}{dx} dz + \frac{dC}{dx}.$$

On peut donc faire, dans un ordre quelconque, les deux opérations sur $F(z, x)$, pourvu que les constantes relatives aux deux intégrations soient liées par la condition, que la seconde soit la dérivée de la première par rapport à x.

360. Si au lieu de différentier $\int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz$, on avait à l'intégrer par rapport à x entre les limites x_0, X; z_0 et Z étant supposées indépendantes de x, on observerait, d'après ce qui précède, que, quel que soit z,

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^{z} dz \int_{x_0}^{x} F(z, x)\, dx$$

ont la même dérivée par rapport à x; et comme elles deviennent nulles toutes deux pour $x = x_0$, elles sont aussi égales quel que soit x. L'ordre des deux opérations est donc encore indifférent. Tout cela suppose que la fonction $F(z, x)$ ne devient ni infinie ni indéterminée, pour aucune valeur de x et z comprise entre les limites : si cela arrivait, il faudrait un examen particulier dont nous nous occuperons tout à l'heure.

361. Si les deux intégrales étaient indéfinies, la première serait

$$\int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + \varphi(x);$$

en l'intégrant, on trouverait

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + f(z) + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{z_0}^{z} F(z, x)\, dz + f(z) + f_1(x),$$

et l'on trouverait un résultat identique en intégrant en ordre inverse; les fonctions f et f_1 pouvant toujours être regardées comme les mêmes dans les deux cas, puisqu'elles sont entièrement arbitraires.

362. *Intégrales définies singulières.* — M. Cauchy a désigné sous ce nom, des intégrales prises entre des limites qui se rapprochent indéfiniment d'une valeur particulière de la variable, qui rend la fonction infinie.

Par exemple, si l'on suppose $F(a)$ infinie, l'intégrale $\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\, dx$ sera une intégrale définie singulière, si ε tend vers zéro, μ étant un nombre fini quelconque. On peut mettre la fonction différentielle sous la forme $(x-a)\, F(x) \frac{dx}{x-a}$; et si l'on désigne par ξ une valeur moyenne entre $a-\varepsilon$ et $a-\mu\varepsilon$, l'intégrale sera égale à

$$(\xi - a)\, F(\xi) \int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x-a}, \quad \text{ou} \quad (\xi - a)\, F(\xi)\, l\mu.$$

Si $(\xi - a)\, F(\xi)$ a une limite différente de zéro quand ξ tend vers a, l'intégrale définie singulière aura une valeur déterminée en même temps que μ. Nous allons voir à quoi cette considération peut être utile dans la détermination des intégrales définies.

363. *Cas où la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini.* — Si une valeur $x = a$ rend $F(x)$ infinie, et se trouve comprise dans les limites de l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\, dx$,

on formera d'abord $\int_{\alpha}^{a-\varepsilon} F(x)\,dx$, puis $\int_{a+\varepsilon}^{\beta} F(x)\,dx$; on les ajoutera, puis on fera tendre ε vers zéro : la limite est ce que M. Cauchy nomme *la valeur principale* de l'intégrale. On pourra avoir une valeur différente si l'on cherche la limite de la somme des deux intégrales suivantes :

$$\int_{\alpha}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\,dx, \quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{\beta} F(x)\,dx,$$

ε tendant toujours vers zéro, et les nombres μ, ν étant différents; car il y aurait, de plus, les deux intégrales

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} F(x)\,dx, \quad \text{et} \quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{a+\varepsilon} F(x)\,dx.$$

Et si leur somme ne tend pas vers zéro avec ε, on aura une valeur différente de la première, que nous avons nommée valeur principale; mais il est évident que cela n'arrivera jamais lorsque les intégrales $\int_{\alpha}^{a} F(x)\,dz$, $\int_{a}^{\beta} F(x)\,dx$ seront finies. Or les deux dernières intégrales définies singulières ont pour limite de leur somme $K\,l\frac{\mu}{\nu}$, K étant la limite de $(x-a)\,F(x)$ quand x tend vers a, et supposée de même signe quand x est $< a$, ou $> a$ (le cas contraire n'offre, au reste, rien d'embarrassant). Si donc K n'est pas nul, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx$ est indéterminée; mais sa valeur principale est déterminée, soit finie, soit infinie.

Si K est nul, on ne peut pas dire que $K\,l\frac{\mu}{\nu}$ soit nécessairement nul, puisque $l\frac{\mu}{\nu}$ peut être infini.

Par exemple, si $\nu = \varepsilon$, $l\frac{\mu}{\nu}$ est infini, et la seconde intégrale singulière est $\int_{a+\varepsilon^2}^{a+\varepsilon} F(x)\,dx$.

Ainsi, $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{x\,lx} = l\left(1 + \frac{l\nu}{l\varepsilon}\right)$, et si $\nu = \varepsilon$, on a $l2$.

Mais dans cet autre exemple $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, on a $\frac{\xi}{\sqrt{\xi}}\,l\nu$, ou $\sqrt{\xi}\,l\nu$, ξ étant un intermédiaire entre ε et $\nu\varepsilon$; de sorte que $\xi = K\nu\varepsilon$ et $K > 1$: par là $\sqrt{\xi}\,l\nu$ devient $\sqrt{K\varepsilon}\,\sqrt{\nu}\,l\nu$. Mais on sait que $\sqrt{\nu}\,l\nu$ est nul pour $\nu = 0$; donc $\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est nul, comme d'ailleurs on l'aurait vu en effectuant l'intégration.

364. Si l'on suppose une des limites infinie, on aura à considérer l'intégrale $\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\mu\varepsilon}} F(x)\,dx$; et pour que l'intégrale proposée soit finie, il faudra que celle-ci tende vers zéro avec ε, quelque petit que soit μ : il faudra donc que $\frac{1}{K\mu\varepsilon} F\left(\frac{1}{K\mu\varepsilon}\right) l\mu$ tende vers zéro quel que soit μ, K étant > 1

Soit $F(x) = \frac{x^m + \ldots}{A x^n + \ldots}$; $F\left(\frac{1}{K\mu\varepsilon}\right)$ pourra être remplacé par $\frac{1}{A}(K\mu\varepsilon)^{n-m}$, et il faudra que $\mu\varepsilon^{n-m-1}\,l\mu$ tende vers zéro, ce qui exige $n > m + 1$; et cela est suffisant.

On pourra ainsi, au moyen des intégrales définies singulières, reconnaître si les intégrales cherchées deviennent infinies ou indéterminées quand une valeur de x rend la fonction donnée infinie, ou quand une des limites est infinie.

365. On peut encore reconnaître si une intégrale est finie, lorsque sa dérivée devient infinie pour une valeur particulière de x, en la comparant à une autre plus simple, pour laquelle il n'y ait pas d'incertitude, et telle que les deux dérivées aient un rapport fini pour cette valeur particulière : les deux intégrales seront en même temps finies ou infinies. Par exemple $\int_0^x \frac{dx}{(e^x + x^n)x^m}$ et $\int_0^x \frac{dx}{x^m}$ seront dans ce cas. Le rapport des dérivées, $e^x + x^n$, devient 1 pour $x = 0$: or la seconde est finie si $m < 1$, et infinie si $m = 1$, ou $m > 1$; il en est donc de même de la première.

366. *Application des principes précédents à la recherche d'intégrales définies.* — En partant d'intégrales définies connues, et les différentiant ou intégrant par rapport à une constante, on obtient la valeur de nouvelles intégrales.

Ainsi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}};$$

différentiant n fois par rapport à a, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2 + a)^{n+1}} dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

367. Si l'on considère cette autre intégrale,

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

et qu'on différentie $n-1$ fois par rapport à a, on obtient

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\, dx = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a^n}.$$

Si l'on désigne, en général, par $\Gamma(p)$ l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx,$$

quelque valeur positive qu'ait p, on aura, pour toute valeur entière et positive de cette constante,

$$\Gamma(p) = 1.2.3\ldots(p-1),$$

et, pour toute valeur positive de p,

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{a^p}.$$

Si l'on différentie l'intégrale indéfinie $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$, on obtient cette intégrale indéfinie,

$$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{d^n . \frac{e^{ax}}{a}}{da^n} + C'.$$

368. Si l'on part de l'intégrale $\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$ et qu'on intègre ses deux membres par rapport à m entre deux valeurs μ et ν, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{lx}\, dx = l\frac{\mu+1}{\nu+1},$$

et l'on ne saurait donner l'expression de l'intégrale indéfinie.

369. Si l'on intègre par rapport à a, entre deux limites quelconques b et c, les deux membres de l'équa-

tion

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a},$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} = \mathrm{l}\,\frac{c}{b}.$$

Si l'on part de

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos \alpha x dx = \frac{a}{a^2 + \alpha^2},$$

on obtient de même

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \cos \alpha x dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{c^2 + \alpha^2}{b^2 + \alpha^2}.$$

370. De même l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2}$$

donne

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \sin \alpha x dx = \text{arc tang}\,\frac{c}{\alpha} - \text{arc tang}\,\frac{b}{\alpha}.$$

Si, dans cette dernière formule, on fait $b = 0$, $c = \infty$, on obtient la suivante, qui est souvent utile :

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x dx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \pi.$$

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

AUTRES PROCÉDÉS POUR LA DÉTERMINATION D'INTÉGRALES DÉFINIES.

371. On ramène quelquefois une intégrale définie simple à une intégrale définie double, parce que l'indépendance des deux variables peut conduire à des simplifications. Soit par exemple $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Elle est identique avec $\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Si on les multiplie, on aura le carré de l'expression cherchée. Or on peut considérer le produit $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$, comme obtenu en multipliant chaque élément $e^{-x^2}\,dx$ de la première par la seconde; et, dans cette dernière, on peut poser $y = xt$, x restant constamment le même que dans l'élément $e^{-x^2}\,dx$. Rien ne sera changé par là, quoique x s'introduise dans la seconde intégrale qui devient $\int_0^\infty xe^{-x^2t^2}\,dt$. Si l'on pouvait former cette dernière expression en x, en la multipliant par $e^{-x^2}\,dx$, on aurait un élément qui, intégré entre o et ∞, donnerait identiquement le produit des deux intégrales. Mais dans cette intégration, par rapport à t, le facteur constant $e^{-x^2}\,dx$ peut être introduit sous le signe $\int$, et l'on voit qu'on aura à intégrer l'expression

$$e^{-x^2}\,xe^{-x^2t^2}\,dx\,dt, \quad \text{ou} \quad xe^{-x^2(1+t^2)}\,dx\,dt,$$

d'abord par rapport à t, puis par rapport à x, ces deux variables étant indépendantes.

Or on sait que ces deux intégrations peuvent se faire dans un ordre inverse, sans que le résultat soit changé; et, de cette manière, l'opération pourra s'effectuer.

En effet,

$$\int_0^\infty xe^{-x^2(1+t^2)}dx = \frac{1}{2(1+t^2)}, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi};$$

d'où, changeant x en mx,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-m^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m}.$$

372. Cette intégrale importante peut encore s'obtenir par le procédé suivant qui se trouve dans la *Mécanique* de Poisson.

Le produit déjà considéré $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dydx$ représente le quart du volume du solide compris entre le plan XY et la surface dont l'équation est $z = e^{-x^2-y^2}$, qui est engendrée par la révolution de la courbe dont l'équation est $z = e^{-x^2}$ autour de l'axe des z. Or, si l'on décompose ce volume au moyen de surfaces cylindriques infiniment voisines, et de révolution autour de l'axe des z, l'expression du volume compris entre les deux surfaces dont les rayons sont x, et $x + dx$, sera $2\pi xe^{-x^2}dx$; son intégrale est $-\pi e^{-x^2}$, et l'on aura le volume entier du solide, en la prenant entre les limites o et ∞, ce qui donne π. Si l'on en prend le quart, puis la racine carrée,

on aura

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

373. Le passage des quantités réelles aux quantités imaginaires, fait avec la rigueur convenable, peut encore conduire à la détermination de nouvelles intégrales. En effet, on tire de la formule précédente, en changeant x en $x+\alpha$,

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2}dx = e^{-\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2\alpha x}dx$$

$$= e^{-\alpha^2}\int_0^\infty e^{-x^2}(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x})dx;$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-x^2}(e^{2\alpha x}+e^{-2\alpha x})dx = e^{\alpha^2}\sqrt{\pi}.$$

Posons $\alpha = a\sqrt{-1}$; il vient, en observant que $e^{2ax\sqrt{-1}}+e^{2ax\sqrt{-1}} = 2\cos 2ax$,

$$e^{-a^2}\sqrt{\pi} = 2\int^\infty e^{-x^2}\cos 2axdx,$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2axdx = \frac{e^{-a^2}\sqrt{\pi}}{2},$$

ou, en changeant x en mx et am en n,

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nxdx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}e^{-\frac{n}{m^2}}.$$

La substitution de $a\sqrt{-1}$ à α n'a pas altéré l'équation,

parce que les deux membres pouvaient être développés en séries convergentes par rapport à α, et que, par conséquent, les coefficients des mêmes puissances de α étaient nécessairement les mêmes de part et d'autre. Or, comme ils ne changent pas, quelque expression que l'on substitue à α, l'identité a toujours lieu; et c'est pour cela qu'en lui substituant $a\sqrt{-1}$ elle existe encore.

374. En partant des valeurs de deux intégrales définies que nous avons données précédemment, on peut parvenir à l'expression donnée par Wallis, du rapport de la circonférence au diamètre.

Ces deux formules sont

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{3.5.7\ldots(2k+1)};$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2.4\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Lorsque k croît indéfiniment, elles tendent toutes les deux vers zéro, comme on peut s'en assurer en renversant les fractions, qui deviennent évidemment infinies avec k; car la première devient ainsi

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2k}\right),$$

et ce produit surpasse $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k}$, qui croît indéfiniment avec k. Il en serait de même pour la seconde. Mais le rapport de ces intégrales a pour limite l'unité.

En effet, si l'on considère deux valeurs consécutives de k, les valeurs correspondantes de l'une quelconque des deux intégrales ont un rapport qui tend indéfiniment vers l'unité, à mesure que k augmente. Or, si l'on prend l'exposant de x dans l'autre intégrale, compris entre les

deux valeurs de l'exposant de la première, il est clair que la valeur de la seconde intégrale sera comprise entre les deux consécutives de la première, et que son rapport avec chacune d'elles tendra vers l'unité, comme le rapport qu'elles ont l'une avec l'autre.

On peut encore s'en assurer par la considération suivante, dont on trouve de fréquentes applications.

Lorsque k est très-grand, le numérateur est sensiblement nul, tant que x n'est pas très-voisin de l'unité, le dénominateur restant alors fini, la partie de l'intégrale prise depuis zéro jusqu'à une valeur $1-\alpha$, α étant une quantité fixe aussi petite que l'on voudra, est très-petite par rapport au reste de l'intégrale; et le rapport de ces deux parties tend vers zéro en même temps que k augmente, α restant constant (*). Pour comparer les deux intégrales en question, lorsque k augmente indéfiniment, il suffit donc de prendre le rapport des parties de ces intégrales relatives aux limites $1-\alpha$ et 1, puis de supposer que α diminue de plus en plus. Or le rapport des diffé-

(*) On a, en effet,

$$\int_0^{1-\alpha} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

$$\int_{1-\alpha}^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

μ étant compris entre 0 et $1-\alpha$, et γ entre $1-\alpha$ et 1; d'où il résulte

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Le rapport de la seconde intégrale à la première est donc plus grand que

$$\frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}} - 1.$$

Il croît donc infiniment avec n, quelque petit que soit α.

rentielles est x, et, par conséquent, le rapport des parties que nous considérons des intégrales est une moyenne entre les valeurs extrêmes de x, qui sont $1-\alpha$ et 1. Ce rapport a donc pour limite 1; et il en est de même du rapport des intégrales entières, puisqu'on n'en a négligé qu'une partie infiniment petite par rapport à elles-mêmes.

On a donc

$$\lim. \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3.3.5.5\ldots(2k-1)(2k-1)(2k+1)}{2.2.4\ 4.6.6\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2k.2k} = 1,$$

d'où

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4.4.6.6.8\ 8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9\ldots}.$$

Il est facile de voir que l'on aura un résultat trop faible ou trop fort, suivant que l'on prendra un nombre impair ou un nombre pair de facteurs aux deux termes de cette fraction.

Nous parlerons plus tard d'une méthode générale, qui consiste à ramener la détermination des intégrales définies à l'intégration d'équations différentielles relatives aux constantes qui se trouvent sous le signe de l'intégration.

CHAPITRE X.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES QUI RENFERMENT PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

375. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les différentielles qui ne renferment qu'une seule variable et qui sont, par conséquent, de la forme $F(x)\,dx$; nous allons examiner maintenant celles qui renferment plusieurs variables indépendantes, et nous proposer de déterminer, s'il est possible, la fonction de ces variables qui a pour différentielle totale l'expression donnée.

Considérons d'abord deux variables x, y, et soit proposé d'intégrer l'expression

$$M\,dx + N\,dy,$$

dans laquelle on a

$$M = \varphi(x, y), \quad N = \psi(x, y).$$

On observera d'abord qu'il n'existe pas toujours une fonction de x et y dont elle soit la différentielle : car, si l'on désigne par u une pareille fonction, on devra avoir $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$; et comme $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$, il faudra qu'on ait $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$. Si donc les fonctions M, N ne satisfont pas à cette identité, il n'existera aucune fonction de x et y qui ait pour différentielle l'expression donnée. Mais nous allons voir que, si cette condition est remplie, la fonction cherchée existe nécessairement, et que sa détermination se ramène toujours à des quadratures.

On remarquera d'abord que cette fonction, devant avoir M pour dérivée partielle par rapport à x, doit être renfermée dans l'intégrale indéfinie de $M\,dx$ par rapport à x, y étant considérée comme une constante. Elle est donc comprise dans l'expression $\int_{x_0}^{x} M\,dx + V$, V étant une fonction arbitraire de y.

Il reste à déterminer cette fonction de manière que la dérivée partielle par rapport à y soit N. Or cette dérivée est

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx + \frac{dV}{dy}, \quad \text{ou} \quad \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx}\,dx + \frac{dV}{dy},$$

ou enfin

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y) + \frac{dV}{dy}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{dV}{dy} - \psi(x_0, y) = 0, \quad \text{ou} \quad V = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy + C.$$

Il existe donc nécessairement une fonction de x et y, dont l'expression donnée est la différentielle; et la valeur la plus générale de cette fonction u est

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\,dy + C,$$

C étant une constante arbitraire.

376. Il n'y a pas plus de difficulté dans le cas où le nombre des variables indépendantes est plus grand. Soit, par exemple,

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

et

$$M = \varphi(x, y, z), \quad N = \psi(x, y, z), \quad P = \chi(x, y, z).$$

Il faudra d'abord que M, N, P satisfassent aux conditions indispensables

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\quad \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx},\quad \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy}.$$

Cela étant, la fonction cherchée sera nécessairement comprise dans la formule $\int_{x_0}^{x} M\,dx+V$, V étant une fonction arbitraire de y et z, qu'il faut déterminer par la condition, que les dérivées partielles de l'expression précédente, par rapport à y et z, soient respectivement N et P.

On aura donc

$$N=\int_{x_0}^{x}\frac{dM}{dy}dx+\frac{dV}{dy}=\int_{x}^{x}\frac{dN}{dx}dx+\frac{dV}{dy}=N-\psi(x_0,y,z)+\frac{dV}{dy},$$

$$P=\int_{x_0}^{x}\frac{dM}{dz}dx+\frac{dV}{dz}=\int_{x_0}^{x}\frac{dP}{dx}dx+\frac{dV}{dz}=P-\chi(x_0,y,z)+\frac{dV}{dz}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que la fonction V satisfasse aux deux conditions

$$\frac{dV}{dy}=\psi(x_0,y,z),\quad \frac{dV}{dz}=\chi(x_0,y,z),$$

ce qui rentre dans la question précédente. On aura donc

$$V=\int_{y_0}^{y}\psi(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}\chi(x_0,y_0,z)\,dz+C.$$

La fonction dont la différentielle est l'expression donnée, existe donc lorsque les trois conditions ci-dessus ont lieu; et, si on la désigne par u, on aura

$$u=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y,z)\,dz+\int_{y_0}^{y}\psi(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}\chi(x_0,y_0,z)\,dz+C,$$

C étant une constante arbitraire.

Il est facile de voir que le cas de m variables se ramène de la même manière au cas de $m-1$, pourvu que les coefficients satisfassent aux conditions qui expriment que les coefficients différentiels du second ordre de la fonction cherchée, pris de toutes les manières possibles par rapport à deux variables différentes, sont indépendants de l'ordre des différentiations. Donc le problème est toujours possible lorsque ces conditions sont remplies, et il est toujours ramené à de simples quadratures.

CHAPITRE XI.

SÉPARATION DES VARIABLES.

377. Lorsque nous avons cherché à déterminer une fonction inconnue y, d'une variable x, connaissant sa dérivée par rapport à x, nous avons supposé que cette dérivée était exprimée au moyen de x seulement. Il est facile de ramener à ce cas celui où la dérivée serait le produit d'une fonction de x par une fonction de y. En effet, en divisant par le facteur fonction de y, on obtient une équation de la forme suivante, dans laquelle $F(y)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues :

$$(1) \qquad F(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ou

$$(2) \qquad F(y)\,dy = f(x)\,dx.$$

On dit alors que les variables x, y sont séparées.

Si maintenant on trouve une fonction $F_1(y)$ dont la dérivée par rapport à y soit $F(y)$, et une fonction $f_1(x)$ dont la dérivée par rapport à x soit $f(x)$, l'équation (1) nous montre que $F_1(y)$ et $f_1(x)$ auront même dérivée par rapport à x, quelle que soit la valeur de x, et que, par conséquent, elles ne peuvent différer que par une constante ; on aura donc

$$(3) \qquad F_1(y) = f_1(x) + C,$$

C désignant une constante arbitraire. On aura donc ainsi l'équation cherchée entre x et y, et le problème est ra-

mené, comme on le voit, à celui qui a été traité précédemment et qui consiste à remonter de la dérivée d'une fonction à cette fonction.

En prenant l'équation sous la forme (2), les deux membres sont les différentielles des deux fonctions $F_1(y)$, $f_1(x)$, relatives à des valeurs correspondantes de dx, dy. Les accroissements finis quelconques de ces deux fonctions, en passant d'un système de valeurs de x, y à un autre quelconque, sont donc égaux, et ces fonctions ne peuvent différer que par une constante; ce qui ramène à l'équation (3).

CHAPITRE XII.

APPLICATION GÉOMÉTRIQUE DES MÉTHODES D'INTÉGRATION. QUADRATURE DES SURFACES PLANES. RECTIFICATION DES COURBES.

378. D'après ce que nous avons dit dans le premier chapitre du livre III, l'aire comprise entre les deux ordonnées relatives aux abscisses x_0 et x, peut être représentée en coordonnées rectangulaires par $\int_{x_0}^{x} y dx$, et, en coordonnées obliques par $\sin\theta \int_{x_0}^{x} y dx$, θ désignant l'angle des axes. L'équation de la courbe donne y en fonction de x, et la quadrature de la surface en question est ramenée à une intégration. C'est pour cela que l'on désigne souvent par le mot *quadrature* l'opération du calcul intégral par laquelle on remonte de la différentielle d'une fonction à une seule variable, à cette fonction même.

Si l'aire à calculer était comprise entre deux ordonnées et deux arcs de courbe, l'expression de sa différentielle serait $(Y - y)\, dx$, en désignant par Y et y les fonctions de x qui représentent l'ordonnée de chacune des deux courbes. Si la nature de l'une ou de l'autre de ces courbes changeait dans l'intervalle compris entre les limites, il faudrait partager cet intervalle en plusieurs autres, dont les limites seraient les diverses valeurs de x où s'opéraient ces changements.

Si la courbe est donnée par une équation entre des coordonnées polaires θ et r, l'aire que l'on cherche à évaluer est celle de la figure comprise entre deux rayons

vecteurs et l'arc de la courbe. Sa différentielle est, comme nous l'avons déjà vu, $r^2 \frac{d\theta}{2}$. Donc l'aire comprise entre les deux rayons correspondants aux angles θ_0, θ aura pour expression $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2\, d\theta$, r désignant la fonction de θ tirée de l'équation de la courbe.

Si la surface à évaluer était comprise entre deux rayons vecteurs et deux courbes, sa différentielle serait $\frac{(r^2 - r'^2)}{2} d\theta$, r et r' désignant les rayons vecteurs des deux courbes, relatifs à une même valeur de θ; l'aire cherchée serait donc exprimée par $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}(r^2 - r'^2)\, d\theta$, r et r' étant des fonctions connues de θ, déduites des équations des deux courbes.

EXEMPLES.

Paraboles. — Proposons-nous d'abord de calculer l'aire des paraboles renfermées dans l'équation générale

$$y^m = px^n,$$

m et n étant positifs; on aura

$$\int y\,dx = p^{\frac{1}{m}} \int x^{\frac{n}{m}}\, dx = p^{\frac{1}{m}} \frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} + C.$$

Si l'on prend l'aire à partir de $x = 0$, on aura $C = 0$, et l'aire terminée à l'ordonnée relative à une valeur quelconque de x, aura pour expression

$$\frac{mp^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}+1}}{m+n}, \quad \text{ou} \quad \frac{mxy}{m+n}.$$

La partie du rectangle xy qui reste, après avoir retran-

ché celle-ci, et que l'on trouverait directement en prenant $\int_{\beta}^{y} x dy$ est $\frac{nxy}{m+n}$; donc l'arc de la courbe divise le rectangle xy dans le rapport constant de $m:n$.

Si l'on considère au lieu de l'origine un point (α, β) de la courbe, les aires comprises entre les ordonnées ou les abscisses de ce point et du premier, seront les différences de quantités ayant même rapport $\frac{m}{n}$; elles auront donc aussi ce même rapport entre elles. D'où l'on voit que si l'on projette un arc quelconque de la courbe sur l'axe des x et sur l'axe des y, les aires comprises entre cet arc, les lignes projetantes, et l'axe perpendiculaire, sont entre elles comme les exposants m et n.

Hyperboles. — Considérons maintenant l'équation générale $y^m x^n = a$ des hyperboles qui ont pour asymptotes les axes des coordonnées; on aura

$$\int y dx = a^{\frac{1}{m}} \int x^{-\frac{n}{m}} dx = \frac{a^{\frac{1}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1}}{-\frac{n}{m}+1} + C.$$

Soit d'abord $n < m$, et supposons que l'aire commence au point dont les coordonnées sont α, β; l'aire aura pour expression

$$\frac{m a^{\frac{1}{m}} \left(x^{-\frac{n}{m}+1} - \alpha^{-\frac{n}{m}+1} \right)}{m-n}, \quad \text{ou} \quad \frac{m(xy - \alpha\beta)}{m-n}.$$

On voit que sa valeur est finie pour $\alpha = 0$, quoiqu'elle s'étende alors indéfiniment dans le sens des y, puisque l'axe des y est asymptote de la courbe: mais elle devient infinie en même temps que x.

Ainsi l'aire comptée à partir d'une ordonnée arbitraire, et prolongée indéfiniment vers l'une des deux

asymptotes, est finie ou infinie, suivant que la coordonnée comptée sur cette asymptote a le plus grand ou le plus petit exposant dans l'équation. En cherchant $-\int_{\beta}^{y} x dy$, on aurait l'aire comprise entre l'arc et les abscisses menées par ses extrémités; son expression serait $\frac{nxy}{m-n}$. Ces deux aires sont donc encore dans le rapport des exposants m et n.

Si l'on avait $n > m$, on arriverait à la même conclusion.

Si l'on avait $m = n$, l'équation serait de la forme $xy = p^2$, et représenterait une hyperbole équilatère, puisque les axes sont rectangulaires. On aurait alors

$$\int_{\alpha}^{x} y dx = p^2 \int_{\alpha}^{x} \frac{dx}{x} = p^2 \mathrm{l} \frac{x}{\alpha}.$$

Si l'on voulait que l'aire commençât à l'axe des y, on aurait $\alpha = 0$; ce qui fait voir que l'aire comprise entre une ordonnée quelconque et l'axe des y est infinie.

Si l'on suppose $\alpha = p$, l'aire commencera à l'ordonnée menée par le sommet de l'hyperbole; et, si l'on prend p pour unité, son expression sera $\mathrm{l}x$. C'est cette propriété qui a fait donner aux logarithmes népériens le nom de *logarithmes hyperboliques*.

Réciproques. — Les paraboles et les hyperboles que nous venons de considérer jouissent de cette propriété commune que, si l'on projette un arc quelconque de ces courbes sur les deux axes, les aires comprises entre cet arc et les coordonnées parallèles sont dans un rapport constant. Or il est facile de démontrer qu'elles sont les seules courbes qui en jouissent. En effet, cette condition générale est exprimée par l'équation

$$n \int_{\alpha}^{x} y dx = \pm m \int_{\beta}^{y} x dy.$$

Le signe — du second membre se rapportant au cas où dy et dx sont de signes contraires.

Différentiant les deux membres en considérant le point α, β comme immobile, et x, y comme seules variables, il vient

$$ny\,dx = \pm mx\,dy, \quad \text{ou} \quad n\frac{dx}{x} = \pm m\frac{dy}{y},$$

et intégrant

$$n\,\mathrm{l}x = \pm m\,\mathrm{l}y + \mathrm{l}c,$$

en désignant par $\mathrm{l}c$ une constante arbitraire. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$x^n = cy^{\pm m},$$

et représente des paraboles ou des hyperboles, suivant qu'on suppose que les coordonnées varient dans le même sens ou en sens contraire.

Ellipse. — Soit l'équation de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

on aura

$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dx\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a};$$

en substituant, il vient

$$\int dx\sqrt{a^2 - x^2} = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} - \int dx\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Réunissant les deux intégrales, que l'on supposera prises à partir de la même limite, et ajoutant une constante arbitraire, il vient, en divisant par 2, puis multipliant

par $\frac{b}{a}$,

$$\frac{b}{a}\int dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a}+\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}+C.$$

Si l'on veut que l'aire commence à l'axe des y, on aura $C=0$. Si l'on fait ensuite $x=a$, on aura $\frac{\pi ab}{4}$ pour la valeur du quart de l'ellipse. L'aire de l'ellipse entière est donc πab : elle devient πa^2, si $b=a$.

Le terme $\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$ étant équivalent à $\frac{xy}{2}$ mesure le triangle dont les côtés sont x et y; par conséquent, le terme $\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$ mesure le reste de l'aire, c'est-à-dire le secteur formé par l'axe des y, l'arc de l'ellipse et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

Hyperbole. — Soit maintenant l'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,\quad \text{ou}\quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2};$$

on aura

$$\int y\,dx=\frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2}.$$

Et, si l'on suit la même marche que pour l'ellipse, on trouvera

$$\int y\,dx=\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C;$$

si l'on veut faire commencer l'aire au sommet, son expression devra être nulle pour $x=a$, d'où $C=\frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\,a$, et l'aire aura pour valeur

$$\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Le premier terme étant égal à $\frac{xy}{2}$, on en conclut que $\frac{ab}{2} \, l \, \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ est l'expression du secteur compris entre l'axe transverse, l'arc de l'hyperbole et le rayon mené du centre à l'extrémité de cet arc.

Cycloïde. — Considérons maintenant la cycloïde rapportée à son sommet A (*fig.* 96); son équation différentielle sera

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

$2a$ étant le diamètre AB du cercle générateur. L'aire AMP a pour expression

$$\int_0^x y\,dx, \quad \text{ou} \quad \int_0^y dy\,\sqrt{2ay-y^2};$$

elle est donc identique avec l'aire AQN relativement au cercle générateur.

L'aire totale ADK est donc égale à la moitié de celle du cercle, ainsi que l'aire symétrique CHA; et, comme le rectangle CHKDC est égal à $4\pi a^2$, l'aire CADC sera égale à $3\pi a^2$, ou au triple du cercle générateur.

Quant à l'expression de l'intégrale

$$\int dy\,\sqrt{2ay-y^2},$$

on observera qu'elle est identique avec

$$\int dy\,\sqrt{a^2-(y-a)^2};$$

elle rentre donc dans celle que nous avons calculée dans le cas de l'ellipse, en y changeant x en $y-a$. Ainsi l'on

aura

$$\int dy\sqrt{2ay-y^2}=\frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y-a}{a}+C.$$

Si l'on prend l'intégrale à partir de $y=0$, on aura

$$C=\frac{\pi a^2}{4};$$

et si l'on prend pour seconde limite $y=2a$, la valeur de l'aire sera

$$\frac{\pi a^2}{2},$$

comme nous l'avions déjà reconnu.

Spirale logarithmique. — L'équation de cette courbe est, en coordonnées polaires, $r=Ae^{a\theta}$; l'aire comprise entre deux rayons vecteurs correspondants aux angles θ_0 et θ aura donc pour expression

$$\frac{A^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta}e^{2a\theta}\,d\theta,\quad \text{ou}\quad \frac{A^2}{4a}\left(e^{2a\theta}-e^{2a\theta_0}\right),$$

ou

$$\frac{r^2-r_0^2}{4a},$$

en désignant par r_0 et r les valeurs extrêmes du rayon vecteur.

Si l'on part de $r_0=0$, c'est-à-dire si l'on cherche la limite de l'aire comprise entre le rayon fixe r et un autre rayon dont l'extrémité tend vers le pôle, tandis que sa direction tourne indéfiniment autour de ce point asymptote, on trouvera simplement $\frac{r^2}{4a}$. Cette aire croît donc comme le carré du rayon vecteur.

Rectification des courbes.

379. Nous avons démontré que la différentielle d'un arc de courbe plan est $\sqrt{dx^2+dy^2}$, en supposant les axes rectangulaires : elle sera pour une courbe à double courbure, $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Lorsque les axes font entre eux des angles quelconques, on sait quels termes il faut ajouter sous le radical; mais on suppose ordinairement ces angles droits. L'arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x aura donc pour expression, dans le premier cas,

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{dx^2+dy^2},$$

et, dans le second,

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Si la courbe plane était rapportée à des coordonnées polaires, nous avons vu que la différentielle de sa longueur aurait pour expression

$$\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},$$

et sa longueur serait, par conséquent, exprimée par

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},$$

θ_0 et θ étant des valeurs extrêmes de l'angle θ.

EXEMPLES.

Parabole. — Soit d'abord la parabole ayant pour équation

$$y^2=2px, \quad \text{d'où} \quad ydy=pdx, \quad dx=\frac{ydy}{p},$$

on aura

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=dy\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}.$$

La longueur de l'arc dont les extrémités correspondent à y_0 et y aura donc pour expression

$$\frac{1}{p}\int_{y_0}^{y} dy\sqrt{y^2+p^2}=\frac{1}{2p}\left[y\sqrt{y^2+p^2}+p^2\,l\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right)+C\right].$$

Si l'on veut faire commencer l'arc au sommet, on aura

$$C=-p^2\,l\,p,$$

et l'expression de cet arc sera

$$\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\,l\left(\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right).$$

Ellipse. — L'équation de l'ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

donne

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}},$$

en désignant $\sqrt{a^2-b^2}$ par ae.

L'abscisse x étant toujours moindre que a, on peut poser

$$x=a\sin\varphi,$$

d'où

$$dx=a\cos\varphi\,d\varphi,\quad ds=a\,d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

Pour intégrer cette expression, on développera le radical en série, ce qui est permis, puisque le second terme est plus petit que le premier. On aura ainsi

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}=1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2\varphi-\frac{1.1}{2.4}e^4\sin^4\varphi-\ldots-\frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}e^{2m}\sin^{2m}\varphi-\ldots$$

et, par suite,

$$s = a\left[\varphi - \frac{1}{2}e^2\int \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{1.1}{2.4}e^4\int \sin^4\varphi\, d\varphi - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}e^{2m}\int \sin^{2m}\varphi\, d\varphi - \ldots\right].$$

Cette série sera d'autant plus convergente que l'excentricité e sera plus petite. Si l'on intègre à partir de $\varphi = 0$, on aura

$$\int \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{2m}\left[\sin^{2m-1}\varphi + \frac{2m-1}{2m}\sin^{2m-3}\varphi + \ldots + \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 2}\sin\varphi\right] + \frac{(2m-1)\ldots 3.1}{2m\,.\,4.2}\varphi;$$

et, si l'on prend pour seconde limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura pour l'expression du quart du périmètre de l'ellipse,

$$\frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \ldots - \frac{}{2m-1}\left(\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots 2m}e^m\right)^2 - \ldots\right].$$

Si $e = 0$, l'ellipse devient le cercle dont le rayon est a, et l'expression précédente se réduit à $\frac{\pi a}{2}$, qui est, en effet, le quart de la circonférence.

Hyperbole. — L'équation de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}},$$

en posant

$$\sqrt{a^2 + b^2} = ae.$$

Les valeurs de x étant toujours plus grandes que a, on posera $x = \frac{a}{\cos\varphi}$, et l'on aura

$$ds = ae\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Si l'on développe en série le radical, et qu'on intègre à partir de $\varphi = 0$ qui correspond à $x = a$, on aura

$$s = ae\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} - \ldots - \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m}\varphi}{e^{2m}} - \ldots\right],$$

d'où

$$s = ae\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{a\varphi}{2e} - \frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots + \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\cos^{2m-2}\varphi}{e^{2m-2}} + \ldots\right]$$

Lorsque x croît indéfiniment, φ tend vers $\frac{\pi}{2}$, et s croît sans limite. Mais si l'on cherche la différence entre l'arc et la partie de l'asymptote comprise entre le centre et le point correspondant de l'abscisse de l'extrémité de l'arc, cette différence tend vers une limite dont il est facile d'obtenir l'expression. En effet, cette partie de l'asymptote est égale à $\frac{ae}{\cos\varphi}$; et, si l'on en retranche s, il reste

$$\frac{ae(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a\varphi}{2e} + \frac{a}{e}\int_0^\varphi d\varphi\left[\frac{1.1}{2.4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots\right].$$

Si l'on passe à la limite $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\frac{\pi a}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots\right].$$

380. *Cycloïde.* — L'équation de la cycloïde rapportée à son sommet est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

d'où

$$ds = dy\sqrt{1 + \frac{2a-y}{y}} = y^{-\frac{1}{2}}dy\sqrt{2a};$$

donc

$$s = 2y^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a} + C;$$

et si l'on fait commencer l'arc au sommet, on aura

$$C = 0 \quad \text{et} \quad s = 2\sqrt{2ay}.$$

Si l'on fait $y = 2a$, on aura la moitié du périmètre de la cycloïde, qui sera égale à $4a$. Pour une valeur quelconque de y, s est double de la longueur de la tangente.

C'est à quoi l'on était déjà parvenu par la théorie des développées.

Spirale logarithmique. — L'équation polaire de cette courbe est

$$r = Ae^{a\theta}, \quad \text{d'où} \quad dr = Aae^{a\theta}d\theta;$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2} = A\sqrt{1+a^2}.e^{a\theta}d\theta.$$

Donc

$$s = A\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}e^{a\theta} + C = r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + C.$$

Si l'arc commence au pôle, qui est asymptote de la courbe, on aura

$$C = 0 \quad \text{et} \quad s = r\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Cette expression est celle de la longueur de la tangente menée à l'extrémité de l'arc, et terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur mené par le pôle. Ce résultat avait déjà été obtenu par la théorie des développées.

381. Supposons maintenant les points déterminés par trois coordonnés polaires. Soient θ l'angle formé par le rayon vecteur r avec l'axe des z, et ψ l'angle formé par sa projection sur le plan XY avec l'axe des x. Toute courbe sera déterminée par deux équations entre r, ψ, θ. Les équations qui déterminent généralement x, y, z en fonctions de r, θ, ψ, feront connaître dx, dy dz, au moyen de r, θ, ψ, dr, $d\theta$, $d\psi$; et en les substituant dans $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on aura l'expression de la différen-

tielle de l'arc en coordonnées polaires. Mais on peut y arriver directement de la manière suivante :

Si l'on conçoit une sphère décrite du pôle comme centre avec le rayon r, elle coupe le rayon $r + dr$ en un point qui, joint à l'extrémité de r par un arc de grand cercle, détermine un triangle rectangle infiniment petit, dont ds est l'hypoténuse et dr un des côtés de l'angle droit. Pour déterminer le troisième côté, on mènera par l'axe des z deux plans contenant respectivement les deux rayons, et qui comprendront entre eux l'angle $d\psi$; puis, par l'une des extrémités de ce troisième côté, on mènera un plan parallèle à XY : le côté cherché sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle tracé sur la sphère, et dont les deux côtés de l'angle droit seront respectivement $r \sin \theta d\psi$ et $rd\theta$. On aura donc

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2};$$

et pour avoir s, il suffira d'exprimer deux des variables en fonction de la troisième d'après les équations de la courbe, et d'intégrer entre les limites demandées.

CHAPITRE XIII.

CUBATURE DES SOLIDES ET QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

Cubature des solides de révolution.

382. Considérons maintenant le solide formé par la révolution d'une surface plane autour d'un axe situé dans son plan, et que nous prendrons pour axe des x. L'équation de la courbe qui termine cette surface est donnée entre deux coordonnées x, y, situées dans le plan YAX, où se trouve primitivement cette courbe. Cela posé, nous nous proposons d'évaluer le volume compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et qui est engendré par la partie MNM'N' de la surface (*fig.* 97) comprise entre les deux ordonnées arbitraires MP, NQ. Pour cela, nous chercherons l'expression de la différentielle de ce volume, que l'on peut considérer comme l'accroissement infiniment petit que prend le volume V lorsque la variable x dont il est fonction prend l'accroissement dx. Soit QR $= dx$, dV sera considéré comme le volume engendré par la surface NKN'K'. Mais, si par les points N, N' on mène des parallèles à AX, on remplacera NKN'K' par un rectangle qui engendrera un volume, dont le rapport avec l'accroissement exact du volume aura pour limite l'unité; ce que l'on démontre comme pour les aires. Mais le volume qu'engendre ce rectangle a pour mesure $\pi\,(y^2 - y'^2)\,dx$, y et y' étant les ordonnées NQ, N'Q; donc le volume V, compris entre deux

plans correspondants aux abscisses x_0, x, a pour expression

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - y'^2)\, dx.$$

Si l'on veut avoir le volume total, il faudra prendre pour limites de cette intégrale la plus petite et la plus grande des valeurs des x auxquelles correspondent des points de la surface donnée.

EXEMPLES.

Ellipsoïde. — Supposons que la surface génératrice soit celle d'une ellipse tournant autour d'un de ses axes, son équation sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

et l'on aura

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (2ax - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Si le volume doit commencer au sommet, on a

$$C = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right).$$

On aura le volume entier de l'ellipsoïde en faisant $x = 2a$, ce qui donne

$$V = \frac{4\pi b^2 a}{3};$$

il devient $\frac{4}{3}\pi a^3$ si $b = a$, ce qui réduit l'ellipsoïde à la sphère dont le rayon est a.

Il est à remarquer que la différentielle dV, ne renfermant pas de radicaux, ne devient pas imaginaire en dehors des limites 0 et $+2a$; elle ne fait que changer de signe, et est égale, au signe près, à celle du volume en-

gendré par l'hyperbole, dont l'équation serait

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - 2ax).$$

Il résulte de là que, si dans l'expression de V on donne à la seconde limite x une valeur négative, on obtiendra le volume de l'hyperboloïde, depuis cette valeur de x jusqu'à $x = 0$; que, si l'on donne à x une valeur positive plus petite que $2a$, on aura le volume de l'ellipsoïde depuis $x = 0$ jusqu'à cette seconde limite; et qu'enfin, si l'on donne à x une valeur positive plus grande que $2a$, on obtiendra le volume entier de l'ellipsoïde, diminuée du volume de l'hyperboloïde compris entre $x = 2a$ et la seconde limite.

Donc, si l'on veut trouver la valeur qu'il convient de donner à x pour que V soit égal à un volume donné, ou que l'ellipsoïde soit partagé dans un rapport donné, on trouvera trois valeurs réelles : l'une négative, l'autre positive et plus petite que $2a$, et la troisième positive et plus grande que $2a$. Mais la seconde seule satisfait à la condition de partager l'ellipsoïde dans le rapport demandé, ou de manière à ce que V ait une valeur donnée, pourvu qu'elle soit moindre que $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Tore. — Ce solide est engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan. Soit l'équation de ce cercle

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2,$$

ou

$$y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

La différentielle du volume est (*fig.* 98)

$$\pi\left(\overline{MP}^2 - \overline{M'P}^2\right) dx,$$

ou

$$4\pi\beta\, dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2},$$

ou encore

$$2\pi\beta . MM'\, dx.$$

Or $MM'\, dx$ est la différentielle de l'aire du cercle générateur. Donc le volume engendré par la partie du cercle comprise entre deux ordonnées quelconques est égal à cette aire multipliée par $2\pi\beta$, c'est-à-dire par la circonférence décrite par le centre du cercle.

Si l'on veut avoir le volume entier du solide, il faut multiplier l'aire du cercle par la circonférence décrite par son centre, ce qui donne $2\pi^2\beta R^2$.

On trouverait le même résultat en intégrant la différentielle $dx \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$ que nous avons déjà trouvée dans la quadrature de l'ellipse et du cercle.

Quadrature des surfaces de révolution.

383. Nous avons appelé *aire d'une surface courbe* la limite de l'aire d'un polyèdre inscrit ou circonscrit à cette surface, et dont les faces infiniment petites ont pour limites de leurs directions les plans tangents aux différents points de cette surface.

Nous en avons conclu qu'on peut, au lieu des éléments plans qui composent la surface du polyèdre, considérer des surfaces courbes dont les plans tangents aient pour limites ceux de la surface proposée. On pourra donc regarder la surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, comme la limite de la somme des troncs de cônes infiniment petits, engendrés par les côtés d'un polygone inscrit dans cette courbe. Si l'on désigne par y et $y + dy$ les ordonnées des deux points extrêmes d'un quelconque de ces côtés ayant pour longueur ds, la surface du tronc

de cône qu'il engendre aura pour mesure

$$2\pi\left(y+\frac{dy}{2}\right)ds, \quad \text{ou} \quad 2\pi y ds,$$

en négligeant l'infiniment petit du second ordre.

L'aire engendrée par l'arc dont les points extrêmes ont pour abscisses x_0 et x aura donc pour expression

$$2\pi\int_{x_0}^{x} y ds, \quad \text{ou} \quad 2\pi\int_{x_0}^{x} y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

EXEMPLES.

Ellipsoïde. — Supposons que l'ellipse dont l'équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

tourne autour de l'axe des x; elle engendrera une surface dont la différentielle sera

$$\frac{2\pi b}{a^2}dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}.$$

Supposons d'abord $a>b$ et posons

$$a^2-b^2=a^2e^2;$$

l'aire, commençant à $x=0$, aura pour expression

$$\frac{2\pi be}{a}\int_{x_0}^{x}dx\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}=\frac{\pi be}{a}\left[x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}+\frac{a^2}{e^2}\text{arc sin}\frac{ex}{a}\right].$$

Il ne faut pas ajouter de constante, puisque l'aire est nulle pour $x=0$. On aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde en faisant $x=a$, ce qui donne, pour la surface entière,

$$2\pi b^2+\frac{2\pi ba}{e}\text{arc sin}\, e.$$

Si $e=0$, $a=b$, et l'ellipsoïde devient une sphère;

comme d'ailleurs $\frac{\text{arc sin } e}{e}$ tend vers l'unité à mesure que e tend vers zéro, on aura $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère dont le rayon est a.

Supposons, en second lieu, $a < b$ et posons

$$b^2 - a^2 = b^2 e^2;$$

l'expression de l'aire, à partir de $x = 0$, sera

$$\frac{2\pi b^2 e}{a^2}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2} = \frac{\pi b^2 e}{a^2}\left[x\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2}+\frac{a^4}{b^2e^2}\,l\left(\frac{x+\sqrt{\frac{a^4}{b^2e^2}+x^2}}{\frac{a^2}{be}}\right)\right].$$

Si l'on fait $x = a$, on aura la moitié de la surface de l'ellipsoïde, et la surface entière aura pour expression

$$2\pi b\sqrt{a^2+b^2e^2}+\frac{2\pi a^2}{e}\,l\,\frac{be+\sqrt{a^2+b^2e^2}}{a}.$$

On retrouve encore la surface de la sphère, quand on suppose $e = 0$. En effet, la première partie devient $2\pi a^2$; pour obtenir la seconde, on développera $\sqrt{a^2+b^2e^2}$ en série, ce qui est permis, puisque b^2e^2 tendant vers zéro est plus petit que a^2, et l'on trouvera encore $2\pi a^2$; ce qui donnera $4\pi a^2$ pour l'aire totale de la sphère.

Surface du tore. — Supposons qu'on fasse tourner autour de l'axe des x le cercle dont l'équation est

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2 = R^2;$$

la partie supérieure engendrera une surface dont la différentielle sera

$$2\pi\left[\beta+\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\right]ds.$$

La différentielle de l'aire engendrée par la partie inférieure sera

$$2\pi\left[\beta-\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\right]ds.$$

Si on les suppose comprises entre les deux mêmes plans perpendiculaires à l'axe, x et ds seront les mêmes, et la somme des deux différentielles sera $4\pi 6\,ds$, dont l'intégrale est $4\pi 6 s + C$.

On aura la surface entière en prenant s égal à la demi-circonférence πR, et $C = 0$; ce qui donnera

$$4\pi^2 6R, \quad \text{ou} \quad 2\pi R\, 2\pi 6.$$

La surface du solide entier est donc égale au produit de la circonférence génératrice par la circonférence décrite par son centre.

On peut calculer séparément la surface engendrée par la partie supérieure, et par la partie inférieure de la circonférence. En effet, la première est

$$2\pi\left[6s + \int ds\sqrt{R^2 - (x-\alpha)^2}\right] = 2\pi\left(6s + \int R\,dx\right)$$
$$= 2\pi\left(6s + Rx + C\right).$$

Pour avoir la partie supérieure tout entière, il faut prendre pour x les limites $\alpha - R$, $\alpha + R$, et donner à s la valeur πR; ce qui donne

$$2\pi^2 6R + 4\pi R^2.$$

Dans le calcul de la partie inférieure, il n'y aura que le second terme à changer de signe, et l'on trouvera

$$2\pi^2 6R - 4\pi R^2.$$

Leur somme est $4\pi^2 6R$, comme nous l'avions déjà trouvé. Leur différence est $8\pi R^2$, ou le double de la surface de la sphère dont le rayon est R.

Il est remarquable que cette différence soit indépendante de la distance du cercle à l'axe de rotation; et cela tient à la symétrie de la courbe par rapport à une parallèle à l'axe. Dans le cas général où cette condition sera remplie, la différence des surfaces engendrées par les deux parties de la courbe sera encore indépendante de la distance à l'axe de rotation.

Volume des corps terminés par des surfaces quelconques.

384. Si l'on partage un corps en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à l'un des axes des coordonnées rectangulaires, nous avons vu qu'on pourra substituer à ces éléments, des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, et pour hauteurs les distances de ces mêmes plans; parce que la limite du rapport de ces cylindres aux éléments du corps est l'unité.

Donc, si l'on peut obtenir en fonction de x l'expression de l'aire de la section faite dans le corps par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x, la différentielle du volume sera $F(x)\,dx$, en désignant par $F(x)$ l'aire de la section; et le volume du corps compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et correspondants aux abscisses x_0, x, aura pour expression $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$. Le problème sera donc ramené à l'intégration d'une fonction comme d'une seule variable. Si l'on ne peut exprimer immédiatement l'aire de la section, on en obtiendra la valeur au moyen d'une première intégration. Représentons par z et z' les ordonnées de la partie supérieure et de la partie inférieure de la surface. Ce sont des fonctions données de x et y, qui pourront être de nature différente. L'aire de la section correspondante à une valeur quelconque de x aura pour expression $\int(z-z')\,dy$, y variant seul et x restant constant dans les fonctions z et z'. Les limites de cette intégrale seront les valeurs de y correspondantes aux points extrêmes de la section; ces points seront, en général, ceux où la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des z; et si l'on considère l'ensemble de toutes les sections, ces points se projettent sur le

plan XY suivant la trace du cylindre circonscrit au corps, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z. Ces valeurs de y qui sont les limites de cette première intégrale sont donc des fonctions connues de x, et, par conséquent, $\int (z - z')\, dy$ sera une fonction de x, que nous supposerons que l'on puisse former, et que nous représenterons par $F(x)$. La question est alors ramenée au premier cas, et il suffira de calculer $\int F(x)\, dx$, entre les deux limites données pour x. Ces deux intégrations successives s'expriment de la manière suivante :

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy\,;$$

y_0 et y désignent les deux fonctions de x qui expriment les ordonnées de la trace sur XY, du cylindre circonscrit au solide, et ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z.

Ce calcul n'exige donc que deux intégrations de fonctions d'une seule variable.

On peut remarquer que ce procédé revient à calculer la somme des expressions de la forme $(z - z')dy\, dx$, quand on donne à x et y toutes les valeurs comprises dans la projection du solide sur XY et variant par intervalles infiniment petits dx, dy. Cette expression est la mesure du parallélipipède ayant pour base $dxdy$ et pour hauteur $z - z'$; et ce volume peut être substitué à l'élément du solide qui est compris entre les quatre faces latérales de ce parallélipipède, parce que la limite de leur rapport est l'unité. La somme de ces éléments compris entre les deux plans dont la distance est dx, sera exprimée par

$$dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy\,,$$

et la somme de ces dernières expressions, relatives à toutes les valeurs de dx, sera la somme de tous les éléments $(z - z')\, dxdy$ du solide.

385. Déterminons maintenant l'équation de la trace du cylindre circonscrit au corps et parallèle à l'axe des z.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface du corps; le plan tangent au point (x', y', z') aura pour équation

$$(x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0.$$

En un point quelconque de la courbe de contact du cylindre et de la surface donnée, le plan tangent est parallèle à l'axe des z, et, par conséquent, $\frac{dF}{dz'} = 0$; les équations de cette courbe seront donc

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0.$$

Si on élimine z entre ces équations, on aura sa projection sur XY, qui est la courbe demandée. Supposons que son équation soit $\varphi(x, y) = 0$, les valeurs de y qu'on en tirera seront les limites de l'intégrale prise par rapport à y.

Quant aux limites x_0, x, ce sont deux valeurs arbitraires. Si l'on veut avoir le volume entier du corps, ces limites correspondront aux points extrêmes de la trace du cylindre, et s'obtiendront en cherchant les points de cette courbe où la tangente est parallèle à l'axe des y, ou encore les points de la surface où le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des x; ils seront déterminés par les trois équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} = 0.$$

Si l'on avait pour objet de trouver le volume du corps, qui se trouve renfermé dans l'intérieur du cylindre, ayant ses arêtes parallèles à l'axe des z et une base donnée par son équation sur le plan XY, les limites de l'intégration par rapport à y seraient les fonctions de x que

l'on trouverait en résolvant cette équation par rapport à y.

EXEMPLE.

Ellipsoïde. — L'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La section par un plan perpendiculaire à l'axe des x est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

x désignant la distance de ce plan à l'origine, constante pour une même section, et variable d'une section à une autre. On peut calculer l'aire de la section au moyen de la formule que nous avons donnée pour la quadrature de l'ellipse.

Les demi-axes étant, dans ce cas,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

l'aire de la section sera

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

ce sera la valeur de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y}(z-z')\,dy.$$

Reste donc à intégrer

$$\pi bc\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx,$$

ce qui donne

$$\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}-x_0+\frac{x_0^3}{3a^2}\right).$$

Si l'on fait $x_0 = -a$, $x = a$, on aura le volume entier de l'ellipsoïde, et son expression sera $\frac{4}{3}\pi abc$.

On voit que *le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers du cylindre droit circonscrit, ayant ses arêtes parallèles à l'un quelconque des axes.*

Si les axes ne sont pas rectangulaires, les calculs ne différeront que par des facteurs constants. Soient λ l'angle de l'axe des z avec l'axe des y, et μ l'angle de l'axe des x avec le plan YZ. La section faite par un plan parallèle à YZ aura pour expression

$$\int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy \sin\lambda,$$

et le volume compris entre ce plan et le plan infiniment voisin sera

$$\sin\mu\, dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy \sin\lambda.$$

Le volume cherché sera donc exprimé par

$$\sin\mu \sin\lambda \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} (z - z')\, dy.$$

Dans le cas de l'ellipsoïde rapporté à des diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$, on trouvera $\frac{4}{3}\pi a'b'c' \sin\mu \sin\lambda$.

Cette expression devant être égale à $\frac{4}{3}\pi abc$, il en résulte $a'b'c' \sin\mu \sin\lambda = abc$, ce qui montre que *le parallélipipède construit sur les diamètres conjugués est constant.* On voit encore que le volume de l'ellipsoïde est les deux tiers de celui du cylindre circonscrit, ayant ses arêtes parallèles à un diamètre quelconque, et ses bases parallèles au plan conjugué de ce diamètre. Ce qui prouve que *tous les cylindres circonscrits de cette manière à l'ellipsoïde sont équivalents.*

386. Si l'équation de la surface qui termine le corps

est donnée en coordonnées polaires r, θ, ψ, il est convenable d'exprimer la différentielle du volume dans le même système. Pour cela on concevra une sphère décrite du pôle comme centre avec l'unité pour rayon; et l'on partagera sa surface par des grands cercles infiniment rapprochés dont les plans passent par l'axe AZ, et par des petits cercles dont les plans soient parallèles à XY, et à des distances infiniment petites les uns des autres. L'expression générale des quadrilatères qui composeront la surface de la sphère sera $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$. On concevra ensuite un cône ayant son sommet au pôle et ce quadrilatère pour base, et l'on cherchera le volume du corps, qui se trouve compris dans ce cône indéfini. La partie de ce volume comprise entre deux sphères ayant pour rayon r et $r+dr$, aura pour mesure

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Si donc on intègre cette expression par rapport à r entre les deux valeurs r_0 et r, relatives aux deux surfaces qui terminent le corps, on aura le volume du corps compris dans le cône que l'on a considéré. Sa valeur est

$$\tfrac{1}{3}(r^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta\, d\psi;$$

r et r_0 sont des fonctions connues de θ et ψ. Si maintenant on intègre par rapport à θ entre les deux valeurs relatives aux limites du corps, et qui sont des fonctions connues de ψ, on aura

$$\frac{d\psi}{3}\int_{\theta_0}^{\theta} (r^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta.$$

Le résultat de cette intégration sera une fonction de ψ, que l'on intégrera entre les deux valeurs relatives aux plans entre lesquels le corps est renfermé.

Si le pôle est dans l'intérieur du corps, les limites de θ sont o et π; celles de ψ sont o et 2π; et la première limite

de ρ est zéro. Le volume est alors exprimé par

$$\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Quadrature des surfaces courbes quelconques.

387. D'après ce que nous avons dit sur le sens qu'il fallait attacher à l'aire des surfaces courbes, si nous divisons une surface quelconque par des plans infiniment voisins, perpendiculaires, les uns à l'axe des x, les autres à l'axe des y, chacun des quadrilatères qui composeront la surface, et dont la projection sur XY sera $dxdy$, pourra être remplacé par la partie du plan tangent en un quelconque des points de la surface de ce quadrilatère, qui aura la même projection $dxdy$.

Nous supposerons que ce plan tangent soit mené au point de la surface qui se projette en un des sommets du quadrilatère $dxdy$, et nous choisirons celui dont l'x est le plus petit, ainsi que l'y; de sorte que ces coordonnées étant x, y, celles du sommet opposé soient $x + dx, y + dy$. Cela posé, l'aire d'une surface plane étant égale à sa projection orthogonale, divisée par le cosinus de l'angle de son plan avec le plan de projection, on aura, en désignant par s l'aire de la surface courbe,

$$ds = dxdy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, ou p, q étant les dérivées partielles de la fonction de x et y qui représente l'ordonnée de la surface.

Ainsi, pour obtenir la surface qui se projettera sur le plan XY dans l'intérieur d'une courbe, donnée par l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on cherchera d'abord la partie comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, et

distants l'un de l'autre de la quantité infiniment petite dx. Pour cela on intégrera par rapport à y, en considérant x comme constant, l'expression $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$; les limites de cette intégrale seront les valeurs de y données par l'équation $\varphi(x,y)=0$. Désignons ces deux fonctions de x par y_0, y_1. L'aire comprise entre les deux plans sera donc une fonction de x exprimée par

$$dx\int_{y_0}^{y_1} dy\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Si maintenant on intègre cette expression par rapport à x, entre les deux valeurs relatives aux limites de la courbe $\psi(x,y)=0$ et qui satisferont à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

on aura un résultat qui ne renfermera plus ni x ni y, et sera la mesure de l'aire demandée.

Si l'on veut avoir la surface entière d'un corps fini, il suffira de prendre pour l'équation $\varphi(x,y)=0$, celle de la courbe dans l'intérieur de laquelle se projette le corps, et de considérer, successivement ou en même temps, la partie inférieure et la partie supérieure de la surface. Cette courbe se déterminera, comme nous l'avons indiqué, dans la mesure des volumes.

388. *Application à la sphère.* — L'équation de la sphère

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

donne

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z},$$

$$ds=dxdy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{R\,dxdy}{z}=\frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\text{arc sin}\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Dans ce cas, les limites de y sont

$$-\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{R^2-x^2};$$

donc

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \pi.$$

Il reste donc à intégrer $\pi R\,dx$ entre $x = -R$, $x = +R$, ce qui donne $2\pi R^2$ pour l'expression de la surface supérieure; on trouverait le même résultat pour la surface inférieure, et la surface totale sera égale à $4\pi R^2$.

CHAPITRE XIV.

EXEMPLES DE LA DÉTERMINATION DES COURBES D'APRÈS UNE PROPRIÉTÉ DE LEURS TANGENTES.

389. Premier exemple. — *Trouver la courbe dont la sous-tangente est constante.*

D'après l'expression générale de la sous-tangente, on aura, en désignant par a sa valeur constante, par x et y les coordonnées du point de contact, et par dy la différentielle de la fonction qui représente l'ordonnée de la courbe,

$$y\frac{dx}{dy}=a;$$

séparant les variables, il vient

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{y},$$

et d'après la règle du n° 367,

$$\frac{x}{a}=l.y+C=l.\frac{y}{C'},$$

d'où

$$y=C'e^{\frac{x}{a}},$$

équation de la logarithmique.

Deuxième exemple. — *Trouver la courbe dont la sous-normale est constante.*

Désignant par a cette valeur constante, on aura

$$\frac{ydy}{dx}=a,$$

d'où

$$y\,dy = a\,dx, \quad y^2 = 2ax + C,$$

parabole qui a pour axe la ligne des abscisses, $2a$ pour paramètre, et son sommet en un point quelconque de l'axe des x.

Troisième exemple. — *Trouver la courbe dont la normale a une longueur constante a.*

On aura dans ce cas l'équation

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = a,$$

d'où

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2-y^2}{y^2}, \quad dx = \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Les variables étant séparées, on aura, par la règle connue,

$$x = \pm\sqrt{a^2-y^2} + C, \quad (x-C)^2 + y^2 = a^2,$$

cercle dont le rayon est a, et qui a son centre en un point quelconque de l'axe des x.

Quatrième exemple. — *Trouver la courbe dont la tangente a une longueur constante a.*

L'équation sera dans ce cas

$$y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = a,$$

d'où

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{a^2-y^2}{y^2}, \quad dx = \pm\frac{dy}{y}\sqrt{a^2-y^2}.$$

Le second membre est une des différentielles binômes dont nous avons calculé l'intégrale, et en prenant le signe in-

férieur nous en déduirons l'équation suivante,

$$x + C = -\sqrt{a^2 - y^2} + a\,l.\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y};$$

cette courbe est celle qu'on nomme la *tractrice*.

Cinquième exemple. — *Trouver la courbe telle que le carré de l'arc soit proportionnel à l'ordonnée.*

Il est évident que l'arc et l'ordonnée doivent être nuls ensemble, et que par conséquent l'axe des x doit passer par le point de la courbe qui est l'origine des arcs.

En désignant par s la longueur de l'arc, la condition donnée conduit à l'équation

$$s^2 = ay \quad \text{ou} \quad s = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}};$$

pour éliminer s, différentions les deux membres, il vient

$$ds = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}\, dy = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

d'où

$$\frac{a}{4y} dy^2 = dx^2 + dy^2,$$

et, par suite,

$$dx = dy \sqrt{\frac{a}{4y} - 1}.$$

Cette relation est identique à celle que donnerait une cycloïde dont le cercle générateur aurait pour diamètre $\frac{a}{4}$, et dont la tangente au sommet serait l'axe des x.

On retrouverait, au reste, l'équation finie de la cycloïde en intégrant les deux membres de l'équation précédente.

Sixième exemple. — *Trouver l'équation d'une courbe dont toutes les normales soient tangentes à une courbe donnée.*

La courbe à laquelle les normales d'une courbe quelconque sont tangentes étant la développée de cette dernière, on voit que le problème consiste à trouver la développante de la courbe donnée.

Soient x', y' les coordonnées d'un point quelconque de la courbe donnée, dx', dy' leurs différentielles, α, β les coordonnées du point correspondant de la courbe donnée dont l'équation est

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta) = 0.$$

La normale aura pour équation

$$(x - x') + (y - y')\frac{dy'}{dx'} = 0;$$

puisqu'elle passe au point (α, β) on aura

$$\alpha - x' + (\beta - y')\frac{dy'}{dx'} = 0,$$

et comme elle est tangente à la courbe (1), il s'ensuit

$$(2) \qquad \frac{dy'}{dx'} = -\frac{d\alpha}{d\beta},$$

ce qui change l'équation précédente en celle-ci

$$(3) \qquad \alpha - x' - (\beta - y')\frac{d\alpha}{d\beta} = 0.$$

Entre les équations (1), (2), (3), si on élimine α, β après avoir remplacé $\frac{d\alpha}{d\beta}$ par sa valeur en α, β que donnera la différentiation de l'équation (1), on aura une équation entre x', y' et $\frac{dy'}{dx'}$ appartenant à la développante. Ce calcul est le même que celui auquel nous avions été conduits dans la théorie des développées. Nous allons l'effectuer dans le cas particulier du cercle.

Développante du cercle. — L'équation (1) devient, dans ce cas,

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

d'où

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta = 0, \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}:$$

l'équation (3) devient, en supprimant les accents,

$$\alpha x + \beta y = a^2,$$

et l'équation (2) sera

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\beta}{\alpha};$$

l'élimination de α et β conduit à l'équation suivante.

(4) $$(xdx + ydy)^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Soient B (*fig.* 99) le point du cercle à partir duquel on fait le développement, M un point quelconque de la développante et T le point correspondant du cercle, on aura

$$\text{TM} = \text{arc BT};$$

si l'on désigne l'arc BM par s et AM par r, on aura

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad rdr = xdx + ydy, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2;$$

l'équation (4) devient alors

$$rdr = ads.$$

Les variables r et s étant séparées, si l'on intègre les deux membres, après les avoir doublés, on obtient

$$r^2 = 2as + \text{C}.$$

La constante C se déterminera par la condition que pour $s = 0$ on ait $r = a$; ce qui donne $\text{C} = a^2$, et, par suite,

$$r^2 = 2as + a^2.$$

Cette propriété remarquable en fait connaître une autre, en observant que $r^2 = a^2 + \overline{\text{TM}}^2 = a^2 + \overline{\text{BT}}^2$; en effet, on déduit de là, entre les arcs BT et BM ou s, la re-

lation très-simple

$$\overline{BT}^2 = 2as.$$

L'équation (4) peut être transformée en coordonnées polaires. En désignant l'angle MAX par θ, on aura

$$r^2 dr^2 = a^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{ar}\sqrt{r^2 - a^2}:$$

en intégrant les deux membres, on obtient

$$\theta = \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2} + \text{arc sin}\,\frac{a}{r} + C,$$

et comme on doit avoir en même temps

$$\theta = 0, \quad r = a,$$

il en résultera

$$C = -\frac{\pi}{2},$$

et l'équation de la développante deviendra

$$(5) \qquad \theta = \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2} - \text{arc cos}\,\frac{a}{r}.$$

C'est ce qu'on déduirait immédiatement de la figure, en observant qu'on a $\theta = \text{TAX} - \text{TAM}$, ce qui n'est autre chose que l'équation (5).

L'équation précédente $\alpha x + \beta y = a^2$ nous redonnerait, comme nous l'avons vu dans la théorie des développées, l'équation de la développante en coordonnées rectangles. Mais on peut la déduire de l'équation (5) que l'on mettra d'abord sous la forme

$$\text{arc cos}\,\frac{a}{r} = \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2} - \theta,$$

$$\frac{a}{r} = \cos\theta \cos\frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2} + \sin\theta \sin\frac{1}{a}\sqrt{r^2 - a^2};$$

remplaçant $\cos\theta$ par $\frac{x}{r}$, $\sin\theta$ par $\frac{y}{r}$ et r^2 par $x^2 + y^2$, on obtient enfin l'équation déjà trouvée de la développante du cercle

$$x \cos\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} + y \sin\frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = a,$$

que l'on obtiendrait directement en projetant l'abscisse et l'ordonnée du point M sur le rayon AT.

NOTE I.

RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES.

On appelle *série* une suite de termes positifs ou négatifs, dont le nombre est infini.

On dit qu'une série est *convergente*, lorsque la somme algébrique des n premiers termes tend vers une limite déterminée, à mesure que n augmente indéfiniment. Elle est *divergente* dans le cas contraire.

1. Le développement en séries peut être très-utile pour la détermination approchée des grandeurs, soit constantes, soit variables. Mais on ne peut évidemment, dans des calculs soit numériques, soit algébriques, remplacer une quantité quelconque par une série, que lorsque celle-ci a pour limite cette quantité même. Il est donc nécessaire de connaître quelques caractères d'après lesquels on puisse juger si une série donnée est ou n'est pas convergente. Nous allons exposer les règles les plus simples qui ont été données à cet effet, et dont quelques-unes sont tirées du *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

Nous remarquerons d'abord que la somme des termes d'une série ne peut tendre vers une limite déterminée, si la grandeur des termes ne tend pas vers zéro. Cela est tout à fait évident, lorsque les termes sont tous de même signe, parce qu'alors leur somme croîtrait indéfiniment avec leur nombre. Mais, lors même qu'ils seraient de signes différents, les sommes successives ne pourraient avoir une différence moindre que toute quantité donnée avec une grandeur déterminée, puisque deux sommes

consécutives auraient toujours entre elles une différence finie, qui serait le terme auquel s'arrête la dernière.

Il est donc indispensable, pour qu'une série soit convergente, que ses termes aient pour limite zéro; mais cela n'est pas suffisant, comme nous aurons occasion de le reconnaître. Il faut toujours s'assurer qu'après avoir dépassé un assez grand nombre de termes, à partir du commencement, et s'arrêtant à un terme quelconque au delà, la somme des suivants, quelque nombre que l'on en prenne, est au-dessous d'une quantité, qui peut être supposée aussi petite que l'on voudra.

Il est encore bon de remarquer que si une série est convergente quand on prend tous ses termes avec le même signe, elle le sera encore quand on multipliera tous ses termes par un même nombre quelconque, ou même par des nombres différents, positifs ou négatifs, pourvu qu'ils restent finis. En effet, puisque la somme arithmétique des termes de la première série, qui sont au delà d'un certain rang, peut être supposée moindre que toute grandeur donnée, il en sera de même dans la seconde; car la somme de ses termes au delà du même rang, lors même qu'on les prendrait tous avec le même signe, sera moindre que la somme des correspondants de la première, multipliée par le plus grand des facteurs introduits, qui est supposé fini.

2. La série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

offre un exemple d'une suite indéfinie de termes décroissant indéfiniment, et dont la somme n'a pas de limite. En effet, faisons la somme des n termes qui suivent $\frac{1}{n}$, ou

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n};$$

elle est évidemment plus grande que

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{2n}, \quad \text{ou enfin} \quad \frac{1}{2}.$$

Donc, à quelque terme que l'on s'arrête dans la série en question, on peut toujours en prendre un assez grand nombre à la suite, pour obtenir un nombre plus grand que $\frac{1}{2}$; et, par conséquent, la somme des termes de cette série ne tend pas vers une limite, et peut croître indéfiniment.

Séries dont tous les termes sont positifs.

3. Premier théorème. — *Une série est convergente, lorsque le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite plus petite que l'unité, à mesure que le nombre qui exprime son rang devient de plus en plus grand. Elle est divergente lorsque cette limite est plus grande que l'unité.*

Soit la série

$$u_0+u_1+u_2\ldots+u_{n+1}+\ldots,$$

et supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait une limite k plus petite que l'unité. Soit α un nombre déterminé quelconque, compris entre 1 et k; $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par être constamment inférieur à α, quand n aura dépassé une certaine valeur. En considérant la série à partir d'un terme quelconque, au delà de cette valeur, on aura cette suite indéfinie d'inégalités

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\alpha, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<\alpha, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<\alpha, \ldots,$$

d'où résulte

$$u_{n+1}<\alpha u_n, \quad u_{n+2}<\alpha_2 u_n, \quad u_{n+3}<\alpha_3 u_n \ldots.$$

Tous les termes, à partir de u_{n+1}, sont donc inférieurs à

ceux de la suite

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n,$$

qui est une progression géométrique décroissante, et qui a, par conséquent, une limite. Donc aussi la série proposée a une limite, puisque la somme de ces termes, tous positifs, va constamment en augmentant, et reste néanmoins au-dessous d'une certaine quantité finie.

Il est même facile d'apprécier l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. En effet, on a

$$u_n + u_{n+1} + \ldots < u_n(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots);$$

donc

$$\lim.(u_n + u_{n+1} + \ldots) < \frac{u_n}{1-\alpha}.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme u_{n-1} inclusivement est donc moindre que $\frac{u_n}{1-\alpha}$. Or u_n est une quantité connue, qui peut être aussi petite que l'on voudra, puisque les termes de la série, étant au-dessous de ceux d'une progression géométrique décroissante, peuvent devenir moindres que toute quantité donnée : quant à α, il sera en général assez facile d'en avoir une valeur suffisamment approchée.

Il est évident que notre raisonnement ne suppose pas que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait réellement une limite, mais seulement qu'il finisse par être toujours au-dessous d'un nombre déterminé, plus petit que l'unité. Nous nous sommes exprimé ainsi, parce que ce n'est que dans des cas très-exceptionnels que cette fonction de n a une valeur indéterminée lorsque n augmente indéfiniment. Cette remarque s'appliquera à tout ce qui suit.

4. Si, au contraire, on avait $h > 1$, on finirait par avoir

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, α étant compris entre 1 et k, et, par conséquent, plus grand que l'unité. On aurait alors

$$u_{n+1} > \alpha u_n, \quad u_{n+2} > \alpha^2 u_n, \ldots.$$

Les termes de la série proposée croîtraient donc indéfiniment, et, par conséquent, à plus forte raison la série n'aurait pas de limite. Elle serait donc divergente.

Si l'on avait $k = 1$, on ne pourrait rien affirmer; et, dans ce cas, il peut arriver qu'une série soit convergente, ou qu'elle soit divergente.

5. Toutefois il est bon de remarquer que si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être toujours au-dessus de sa limite 1, la série est divergente; car alors les termes finissent par aller toujours en croissant, et, comme ils sont tous positifs, leur somme peut devenir plus grande que toute quantité donnée, puisqu'il en serait ainsi lors même qu'ils conserveraient une valeur constante, quelque petite qu'elle fût.

6. Si la série est ordonnée par rapport aux puissances d'une variable x, et que l'on ait généralement $u_n = A_n x^n$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ deviendra $\frac{A_{n+1}}{A_n} x$; et, en désignant par k la limite du rapport $\frac{A_{n+1}}{A_n}$, la condition de convergence sera

$$kx < 1;$$

d'où l'on tire

$$x < \frac{1}{k}.$$

Ainsi la série sera convergente tant que x sera plus petit que $\frac{1}{k}$, et divergente quand il sera plus grand que $\frac{1}{k}$. Il pourra y avoir incertitude quand x sera égal à $\frac{1}{k}$.

Des remarques analogues pourront être faites au sujet des règles suivantes.

7. En appliquant la règle précédente à la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

on trouve

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1},$$

et, par conséquent,

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0;$$

la série est donc convergente. Sa limite est fractionnaire et comprise entre 2 et 3; car la suite des termes $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots$ est inférieure à celle de la progression qui commencerait par les deux premiers termes, et la limite de cette dernière est moindre que l'unité. Pour avoir une limite de l'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{1}{1.2\ldots n}$, on remarquera que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ allant toujours en diminuant, les termes suivants sont au-dessous de ceux de la progression géométrique dont les deux premiers termes seraient ceux qui suivent immédiatement $\frac{1}{1.2\ldots n}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{1.2\ldots(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}.$$

Donc la somme des termes qu'on néglige dans la proposée est inférieure à la limite de la somme des termes de cette progression, qui est

$$\frac{n+2}{1.2\ldots n(n+1)^2}.$$

C'est donc là une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à $\frac{1}{1.2\ldots n}$.

On pourrait prendre, à plus forte raison, comme limite, l'expression plus simple

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n^2},$$

dont la valeur est plus grande que la première.

Cette série est d'un grand usage dans l'analyse, et l'on désigne ordinairement sa limite par la lettre e.

Il est facile de démontrer que sa valeur est incommensurable.

En effet, supposons qu'elle soit commensurable; comme elle n'est pas entière, elle sera représentée par une expression fractionnaire irréductible $\frac{p}{q}$, q étant >1; on aurait ainsi l'égalité

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.$$

En multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots q$, on aurait

$$1.2\ldots(q-1)\,p=1.2\ldots q+2\ldots q+3\ldots q+\ldots 1$$
$$+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots.$$

Or la limite de la somme des termes fractionnaires du second membre est plus petite que l'unité, puisque ces termes sont inférieurs à ceux de la progression géométrique

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots$$

dont la limite est $\frac{1}{q}$, et, par conséquent, plus petite que l'unité. Donc la limite du second membre de la dernière équation ne serait pas égale au premier; ce qui est absurde. Il résulte de là que la limite de la série proposée ne pouvait être égalée à un nombre commensurable. Cette

limite est donc incommensurable, comme nous voulions le démontrer.

8. La quantité que nous avons désignée par e peut être considérée comme la limite d'une autre expression remarquable que nous allons faire connaître.

Désignons par m un nombre entier positif croissant indéfiniment, et considérons l'expression

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

qui se présente sous la forme indéterminée 1^∞, quand on y fait m infini. Pour déterminer la limite vers laquelle elle tend, quand m croît indéfiniment, développons-la suivant la formule ordinaire du binôme; nous aurons

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n}+\ldots+\frac{1}{m^m}.$$

Tous les termes du second membre sont positifs, et leur nombre est fini et égal à $m+1$. On peut mettre cette équation sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= 1+\frac{1}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots\\ &\quad+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2\ldots n}+\ldots\end{aligned}\right.$$

On voit d'abord qu'un terme quelconque, de rang déterminé et invariable, augmente en même temps que m; et comme le nombre total des termes augmente aussi, leur somme augmente constamment. D'où il suit que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente en même temps que m.

On reconnaît encore que les numérateurs des termes qui forment le second membre de l'équation (1), étant moindres que l'unité, ces termes sont au-dessous des correspondants de la série

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots$$

dont la limite est e. D'où l'on conclut déjà que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est toujours moindre que e; mais nous allons démontrer qu'il s'en approche indéfiniment.

En effet, le terme qui en a n avant lui dans le développement (1) tend indéfiniment vers $\frac{1}{1.2\ldots n}$ à mesure que m croît. Donc la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement peut différer aussi peu qu'on voudra de la somme s_n des correspondants de la série (2), quelque grand que soit le nombre déterminé n. Mais la différence entre s_n et e peut devenir moindre que toute quantité donnée; donc il en est de même de celle qui existe entre e et la somme des $n+1$ premiers termes du développement (1), et, à plus forte raison, de la différence qui existe entre e et le développement (1) tout entier, ou $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$. Donc enfin $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e lorsque m croît indéfiniment, en restant toujours entier.

Considérons maintenant des valeurs positives, non entières pour m. Faisons $m = \mu + \varepsilon$, ε étant une quantité positive moindre que l'unité, et μ un nombre entier. L'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ devient $\left(1 + \frac{1}{\mu + \varepsilon}\right)^{\mu+\varepsilon}$: or on la rendra plus grande si l'on diminue le dénominateur $n + \varepsilon$ et qu'on augmente l'exposant $n + \varepsilon$; et on la rendra plus petite en augmentant le dénominateur et diminuant l'exposant. L'expression proposée sera donc comprise entre

les deux suivantes :

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu},$$

que l'on peut mettre respectivement sous la forme

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)}.$$

Or il est évident qu'elles tendent l'une et l'autre vers la limite e, puisque μ est entier, et que d'ailleurs le facteur $1+\frac{1}{\mu}$ et le diviseur $1+\frac{1}{\mu+1}$ tendent vers l'unité à mesure que μ augmente. Donc enfin la quantité intermédiaire $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ tend vers e, de quelque manière que varie la quantité positive, indéfiniment croissante, désignée par m.

Si l'on pose $\frac{1}{m}=\alpha$, on énoncera le même résultat de cette autre manière :

L'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite e lorsque α est une quantité positive qui tend vers zéro, suivant une loi quelconque.

Il reste à considérer le cas de $\frac{1}{m}$, ou de α, négatif et tendant vers zéro. On posera, dans ce cas, $1+\alpha=\frac{1}{1+\beta}$; β sera une quantité positive tendant vers zéro. On tirera de cette relation

$$\alpha=\frac{-\beta}{1+\beta},$$

et, par suite,

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

Or δ étant positif, $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$ tend vers e, lorsque δ tend vers zéro; de plus, $1+\delta$ tend vers l'unité; donc $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend encore vers e, lorsque α est négatif.

Ainsi, *de quelque manière que la quantité α tende vers zéro, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la limite e.*

9. Si au lieu de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ on avait développé $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, on aurait trouvé pour limite, au lieu de la série (2), la suivante :

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

qui est convergente, quel que soit x, en vertu de la règle précédente. Or

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x,$$

en posant $\frac{x}{m}=\alpha$; et α tend vers zéro, quel que soit z, lorsque m croît indéfiniment : donc $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ a pour limite e^x quel que soit x, et l'on a, par conséquent, l'identité suivante :

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.n}+\ldots.$$

Ce développement important conduit immédiatement à celui de a^x, a étant un nombre quelconque. En effet, $a=e^{la}$, la caractéristique l désignant les logarithmes dans la base e, qui est celle de Néper. On aura, par suite,

$a^x = e^{x\,\mathrm{l}a}$, et, par conséquent,

$$a^x = 1 + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1} + \frac{x^2\,\mathrm{l}^2 a}{1.2} + \frac{x^3\,\mathrm{l}^3 a}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n\,\mathrm{l}^n a}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Considérons encore la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots;$$

elle sera convergente si l'on a

$$\lim. \frac{n}{n+1}\, x < 1 \quad \text{ou} \quad x < 1.$$

Elle sera divergente si l'on a $x > 1$, et les termes croîtront indéfiniment. Lorsque l'on a $x = 1$, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u}$ devient l'unité, et nous avons dit qu'on ne peut, dans ce cas, prononcer, en général, sur la convergence et la divergence d'une série. Mais il n'y a pas ici d'incertitude; car la série devient

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

et nous avons reconnu précédemment que la somme des termes de cette série est infinie.

10. Deuxième théorème. — *Une série dont le terme général est u_n est convergente lorsque $u_n^{\frac{1}{n}}$ tend vers une limite k plus petite que l'unité, quand n augmente indéfiniment. Elle est divergente lorsque la limite k est plus grande que l'unité.*

Supposons d'abord $k < 1$, et soit α un nombre quelconque compris entre k et 1; d'après l'hypothèse, $u_n^{\frac{1}{n}}$ finira par être constamment moindre que α; depuis une

certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On aura alors les inégalités suivantes :

$$u_n^{\frac{1}{n}} < \alpha, \quad u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \alpha, \quad u_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \alpha, \ldots;$$

d'où

$$u_n < \alpha^n, \quad u_{n+1} < \alpha^{n+1}, \quad u_{n+2} < \alpha^{n+2}, \ldots.$$

Donc, à partir d'une valeur convenable de n, tous les termes de la série sont au-dessous de ceux de la progression géométrique décroissante

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots;$$

donc la série proposée a une limite; et l'on aura une quantité plus grande que l'erreur commise en s'arrêtant à u_{n-1}, en prenant la limite de cette progression géométrique, qui est $\frac{\alpha^n}{1-\alpha}$.

Supposons maintenant $k > 1$, et soit encore α un nombre quelconque compris entre k et 1; on finira par avoir $u_n^{\frac{1}{n}} > \alpha$, au delà d'une certaine valeur de n, et l'on aura alors les inégalités

$$u_n > \alpha^n, \quad u_{n+1} > \alpha^{n+1}, \ldots;$$

d'où il suit qu'à partir de u_n, les termes de la série sont au-dessus de ceux de la progression géométrique croissante

$$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots$$

Ils croissent donc eux-mêmes indéfiniment, et la série proposée est divergente.

Enfin, si l'on avait $k = 1$, on ne pourrait affirmer, en général, si la série est convergente ou divergente.

11. Troisième théorème. — *Si les termes d'une série*

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

vont constamment en décroissant à partir du premier, cette série sera convergente ou divergente en même temps que la suivante :

$$(2) \qquad u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots$$

En effet, supposons d'abord la première série convergente. Ses termes allant constamment en décroissant, on aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0, \\
2u_1 &= 2u_1, \\
4u_3 &< 2u_2 + 2u_3, \\
8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7, \\
16u_{15} &< 2u_8 + \ldots\ldots\ldots + 2u_{15}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre ces égalités et inégalités en nombre infini, on voit que la somme des premiers membres, qui sont les termes de la série (2), sera au-dessous de la somme de ceux de la suivante, terminés au même indice de u,

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \ldots$$

Or cette série n'est autre chose que la série (1) dont on aurait doublé les termes, excepté le premier. Elle a donc une limite, et, par conséquent, la série (2) en a une à plus forte raison. Ainsi, d'abord la convergence de la première série entraîne celle de la seconde. Supposons, en second lieu, la série (1) divergente, ses termes allant toujours en décroissant ; on aura évidemment les rela-

tions suivantes :

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 \ldots\ldots + u_{14}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant les premiers membres entre eux, ainsi que les seconds, on reconnaît que la somme des termes de la série (2) est plus grande que la somme de ceux de la série (1), terminés à celui d'indice double; et comme cette dernière croît indéfiniment par hypothèse, il en est de même de l'autre. D'où il suit encore, comme on voulait le démontrer, que la divergence de la série (1) entraîne celle de la série (2). Donc, enfin, les deux séries proposées sont toujours en même temps convergentes ou divergentes.

12. Prenons par exemple, pour la série (1), la suivante :

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \ldots;$$

la série (2) deviendra

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \ldots.$$

Or cette dernière est une progression géométrique dont la raison est $2^{1-\mu}$. Elle est décroissante si l'on a $\mu > 1$, et croissante si $\mu < 1$ ou $\mu = 1$. Donc aussi la série (3) est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu < 1$, ou $\mu = 1$.

La conséquence relative à $\mu = 1$ montre que la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

est infinie, comme nous l'avions déjà reconnu.

13. Quatrième théorème. — *La série*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, lorsque, n croissant indéfiniment, $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ a une limite plus grande que l'unité. Elle est divergente si cette limite est plus petite que l'unité.

En effet, soit h cette limite, et supposons d'abord $h > 1$. On aura donc, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, α désignant un nombre compris entre 1 et h,

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} > \alpha, \quad \text{ou} \quad u_n < \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée, à partir de u_n, sont donc inférieurs à ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots$$

Or celle-ci est convergente d'après le théorème précédent, puisque l'on a $\alpha > 1$; donc aussi la proposée est convergente.

Supposons en second lieu $h < 1$, et soit α un nombre compris entre 1 et h. On finira par avoir, au delà d'une certaine valeur de n,

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} < \alpha, \quad \text{ou} \quad u_n > \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de la série proposée seront donc alors au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots$$

Mais cette dernière est divergente, puisque l'on a $\alpha < 1$: donc la proposée l'est aussi. *Ce qu'il fallait démontrer.*

14. Lorsque la limite h est l'unité, on ne peut, en général, prononcer sur la convergence ou la divergence de la série. Cependant, lorsque le rapport $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ est toujours inférieur à sa limite 1, il est facile de démontrer que la série est divergente.

En effet, l'inégalité $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} \leqq 1$ donne

$$u_n > \frac{1}{n};$$

donc les termes de la série proposée sont au-dessus de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots,$$

que nous avons démontrée divergente. La proposée l'est donc elle-même.

Si le rapport $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ était, au contraire, toujours supérieur à sa limite 1, on prouverait bien que les termes de la série proposée sont au-dessous de ceux de la suivante :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots;$$

mais celle-ci étant divergente, on ne saurait en conclure que la proposée est convergente.

Autre règle pour la convergence des séries.

15. Remarquons d'abord que si l'on a une série convergente

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

et qu'une autre série

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$$

soit telle, que, depuis un certain terme jusqu'à l'infini, on ait

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

cette seconde série sera convergente; car, si l'on multiplie la première par $\frac{v_n}{u_n}$, n ayant une valeur déterminée telle, que la condition supposée soit remplie, la série ainsi obtenue sera encore convergente. Or tous les termes de la seconde, depuis v_n, se trouveront inférieurs aux termes correspondants de cette dernière; donc la seconde série sera elle-même convergente.

Cela posé, considérons une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

telle, que l'on ait

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ étant toujours plus petit que l'unité, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini. On pourra mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

α étant positif et tendant vers zéro.

Or nous allons démontrer que si l'on a

$$\lim. n\alpha > 1,$$

la série sera convergente; et qu'elle sera divergente si l'on a

$$\lim. n\alpha < 1.$$

1°. Soit

$$\lim. n\alpha = k \quad \text{et} \quad k > 1.$$

Désignons par m une quantité déterminée quelconque, comprise entre 1 et k, et, par conséquent, plus grande que l'unité. Il est facile de voir que, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m.$$

En effet,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2n^2} + \ldots;$$

et pour que l'inégalité précédente ait lieu, il suffira que l'on ait

$$\alpha > \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \ldots,$$

ou

$$n\alpha > m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \ldots.$$

Or le second membre tend vers m et le premier vers k, à mesure que n augmente : donc, depuis une valeur déterminée de n jusqu'à l'infini, l'inégalité aura lieu, puisque la limite de son premier membre est plus grande que la limite du second; donc depuis cette valeur de n jusqu'à l'infini, on aura

$$1 + \alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}.$$

Mais si l'on considère la série

$$(1) \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \ldots,$$

le rapport du terme général au précédent sera

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et, par conséquent, plus grand que dans la série proposée. De plus, la série (1) est convergente, puisque l'on a $m > 1$: donc aussi la série proposée est convergente ; ce que nous nous proposions de démontrer.

2°. Soit maintenant

$$\lim. n\alpha = k \quad \text{et} \quad k < 1.$$

Prenons une quantité quelconque m comprise entre 1 et k, et, par suite, plus petite que l'unité; je dis que l'on finira par avoir constamment

$$1+\alpha < \left(1+\frac{1}{n}\right)^m,$$

ou

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2.n^2} + \ldots,$$

ou encore

$$n\alpha < m + \frac{m(m-1)}{1.2.n} + \ldots.$$

En effet, lorsque n croît indéfiniment, le premier membre tend vers k, et le second vers m, qui est plus grand que k. Donc, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, les inégalités précédentes auront lieu; d'où il résultera

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m},$$

et, par conséquent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finit par être constamment supérieur au rapport des termes correspondants de la série dont le terme général est $\frac{1}{n^m}$. Mais m étant plus petit que l'unité, cette dernière série est infinie; donc la proposée l'est aussi.

Donc enfin, comme nous l'avions annoncé, la série proposée sera convergente si l'on a lim. $n\alpha > 1$, et divergente si l'on a lim. $n\alpha < 1$.

16. On ne peut, en général, prononcer sur la nature de la série, lorsque l'on a

$$\text{lim. } n\alpha = 1.$$

Néanmoins, si $n\alpha$ est toujours plus petit que la limite 1, on peut affirmer que la série est divergente; car alors on a

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

et le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur au rapport $\frac{n}{n+1}$ relatif à la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{n}{n+1}+\ldots,$$

d'où il résulte que la série proposée est infinie.

Le seul cas qui reste douteux est donc celui où l'on a

$$\lim. n\alpha = 1,$$

$n\alpha$ n'étant pas constamment plus petit que 1.

17. Appliquons cette règle à la série

$$1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1} + \ldots.$$

On aura, dans ce cas,

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{1}{1 + \frac{6n+5}{(2n+1)^2}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{6n+5}{(2n+1)^2}, \quad n\alpha = \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1},$$

et, par suite,

$$\lim. n\alpha = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2};$$

d'où il résulte que la série proposée est convergente.

Considérons maintenant cette autre série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} + \ldots,$$

pour laquelle on a encore $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aura pour valeur

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}}.$$

On aura donc

$$n\alpha = \frac{n}{2n+1}$$

et

$$\lim. n\alpha = \frac{1}{2},$$

d'où il résulte que la série est divergente, et que la somme est infinie.

Autre règle déduite de la considération des intégrales définies.

18. Nous allons faire connaître encore une règle qui a été déduite de la considération des intégrales définies.

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

dont tous les termes, depuis une certaine valeur de n jusqu'à l'infini, sont positifs et décroissent constamment en tendant vers la limite zéro. Elle sera convergente ou divergente suivant que la somme des termes, à partir de cette valeur de n, tendra ou non vers une limite finie.

Supposons que l'expression du terme général soit une fonction de forme finie de n, et désignons par u_x une fonction de la variable x, obtenue en changeant n en x, dans u_n. Cette fonction u_x reproduirait tous les termes de la série proposée, en y donnant à x toutes les valeurs entières et positives. Sa valeur allant constamment en décroissant quand on fait croître x par degrés égaux à l'unité, à partir d'une certaine valeur entière, il arrivera généralement que la fonction u_x ira constamment en décroissant lorsque x croîtra d'une manière continue depuis une certaine valeur jusqu'à l'infini.

Admettant qu'il en soit ainsi depuis la valeur entière m,

on aura

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x\,dx, \quad u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx,$$

$$u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x\,dx, \ldots,$$

et

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x\,dx, \quad u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx, \ldots,$$

d'où il résulte, en ajoutant respectivement ces deux séries d'inégalités, membre à membre,

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

et

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots.$$

Or, si cette intégrale $\int_m^{\infty} u_x\,dx$ est finie, il s'ensuivra que la série à partir de u_{m+1} le sera de même; et si elle est infinie, la série commençant à u_m le sera aussi. D'où il résulte que la série proposée sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx$$

sera finie ou infinie.

19. Appliquons cette règle à la série, déjà examinée,

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots.$$

La fonction u_x est, dans ce cas, $\frac{1}{x^a}$, et va constamment en décroissant quand x augmente, a étant supposé positif.

Or $\int \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} + C$; et, par suite, $\int_m^\infty \frac{dx}{x^a}$ est infinie si l'on a $a < 1$, et finie si $a > 1$.

Si $a = 1$, on a

$$\int \frac{dx}{x^a} = \int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

quantité infinie en même temps que x.

Donc la série proposée est convergente si $a > 1$; et divergente si $a < 1$, ou $a = 1$.

20. Appliquons cette même règle à la série

$$\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \ldots + \frac{\log n}{n} + \ldots.$$

On a alors $u_x = \frac{\log x}{x}$, expression qui décroît constamment depuis la valeur de x pour laquelle $\log x = 1$. Or

$$\int \frac{dx \log x}{x} = \frac{\log^2 x}{2 \log e} + C.$$

Donc $\int_m^\infty u_x dx$ est infinie, et la série en question est divergente; ce qui montre que le produit $\sqrt[2]{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[4]{4}\ldots\sqrt[n]{n}\ldots$ est infini. Notre première règle conduirait au même résultat, parce que l'on aurait

$$n\alpha = \frac{\log n - n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

ce qui donne lim. $n\alpha = 1$. Mais comme on a évidemment $n\alpha < 1$, la série est divergente, d'après une remarque faite précédemment.

L'une et l'autre règle feraient voir que la série dont le terme général est $\left(\frac{\log n}{n}\right)^2$ est convergente.

Séries dont tous les termes ne sont pas de même signe.

21. Lorsqu'une série n'a pas tous ses termes de même signe, il est évident qu'elle sera convergente, si elle l'est quand on donne le même signe à tous ses termes, par exemple quand on les prend tous positifs. En effet, la somme des termes qui suivent l'un quelconque de ceux de la série proposée, est moindre que la somme des correspondants de la seconde, quel que soit le nombre que l'on en considère, puisque tous ces termes s'ajoutent entre eux dans la seconde, tandis que les uns s'ajoutent et les autres se retranchent dans la première. Donc, puisqu'à partir d'un certain terme de la seconde, la somme des suivants a une limite qui peut devenir moindre que toute quantité donnée, il en est de même à plus forte raison dans la première; et, par conséquent, elle est convergente.

On peut donc d'abord appliquer à ces nouvelles séries les règles données pour celles dont tous les termes sont de même signe, tant pour reconnaître la convergence que pour calculer une limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. Mais ces règles ne dispensent pas d'en chercher de nouvelles, spécialement applicables aux séries dont tous les termes ne sont pas de même signe; parce qu'une pareille série peut être convergente, et devenir divergente quand on donne le même signe à tous ses termes. Nous nous bornerons à celle qui résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque dans une série les termes finissent par être constamment décroissants, et alterna-*

tivement positifs et négatifs, cette série est toujours convergente; et l'erreur commise, en s'arrêtant à un terme quelconque, est moindre que le suivant.

Soit la série

$$u_0 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots$$

Désignons, en général, par s_m la somme des termes depuis le premier jusqu'à u_m inclusivement.

Nous remarquerons d'abord que la somme s_n de termes dont le dernier est positif ne peut être que diminuée par l'addition d'un nombre quelconque des termes suivants. En effet, pour passer de la somme s_n à s_{n+1}, il faut retrancher u_{n+1}; donc on a $s_{n+1} < s_n$. Pour obtenir la somme suivante s_{n+2}, il faut ajouter u_{n+2}, qui est moindre que le terme u_{n+1} qui a été retranché de s_n; donc on a encore $s_{n+2} < s_n$. Le même raisonnement se reproduisant indéfiniment, on voit que la somme s_n est plus grande que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

On voit, au contraire, que si l'on s'arrête à un terme négatif, la somme sera toujours moindre que toutes celles dont l'indice est plus élevé.

Ainsi les sommes dont le dernier terme est positif vont toujours en diminuant; et celles dont le dernier terme est négatif augmentent constamment, en restant toujours au-dessous des premières. Ces deux suites de sommes se rapprochent donc de plus en plus à mesure qu'on avance dans la série, et leur différence tend vers zéro, puisqu'elle n'est autre chose que le dernier terme de la dernière, lequel tend vers zéro, par hypothèse, à mesure que son indice augmente indéfiniment.

Donc enfin *la somme des termes tend vers une limite déterminée, et l'erreur positive ou négative est toujours moindre que le terme qui suit celui auquel on s'est arrêté.*

Soit, par exemple, la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Le rapport d'un terme au précédent est exprimé généralement par $\frac{n}{n+1}x$, et sa limite est x. Ainsi, d'abord la série sera convergente si l'on a $x < 1$ en valeur absolue; divergente si $x > 1$. Lorsque $x = 1$, la série est convergente en vertu de la dernière règle, puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs, et décroissent indéfiniment. Mais si l'on prenait $x = -1$, la série aurait une somme infinie.

Lorsque la série est convergente, l'erreur que l'on commet, c'est-à-dire la quantité que l'on omet, en s'arrêtant à $\frac{x^n}{n}$, est moindre que $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et de même signe que ce terme.

Des séries imaginaires.

22. Lorsque les termes d'une série sont de la forme $u + v\sqrt{-1}$, on entend que cette série est convergente lorsque la somme des termes réels a une limite s, et que la somme des coefficients de $\sqrt{-1}$ tend de même vers une limite t : on dit alors que la limite de la série est $s + t\sqrt{-1}$.

On est ainsi ramené aux conditions de convergence de deux séries réelles. Mais il suffit souvent d'en considérer une seule, celle qui se rapporte aux modules des termes de la proposée.

En effet, on peut toujours poser

$$u + v\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

et la série proposée prend la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \rho_0(\cos\theta_0 + \sqrt{-1}\sin\theta_0) + \rho_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) + \ldots \\ \qquad + \rho_n(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n) + \ldots. \end{cases}$$

Or, si la série

$$(2)\qquad \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n + \ldots$$

est convergente, en prenant tous les termes positifs, il s'ensuit, à plus forte raison, que les deux suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho_0\cos\theta_0 + \rho_1\cos\theta_1 + \ldots + \rho_n\cos\theta_n + \ldots, \\ \rho_0\sin\theta_0 + \rho_1\sin\theta_1 + \ldots + \rho_n\sin\theta_n + \ldots \end{cases}$$

le seront elles-mêmes; car, à partir d'un terme quelconque, la somme des suivants jusqu'à l'infini est évidemment moindre que dans la première. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Une série imaginaire est convergente lorsque la série des valeurs absolues des modules de tous ses termes est convergente.

Lorsque la série (2) n'est pas convergente, il est possible que ses termes tendent ou ne tendent pas vers zéro. S'ils n'y tendent pas, les séries (3) ne peuvent être toutes deux convergentes; car, quelque valeur qu'on puisse supposer à l'angle θ, il est impossible que $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$ tendent tous deux vers zéro, si ρ n'y tend pas. Les termes des deux séries (3) ne peuvent donc tendre vers zéro, ce qui est cependant une des conditions indispensables de la convergence. *La série* (1) *est donc, dans ce cas, divergente.*

En second lieu, si la série (2) étant divergente ses termes décroissent indéfiniment, il n'est pas impossible que les séries (3) soient convergentes, parce que tous leurs termes ne sont pas de même signe; on ne peut donc alors rien affirmer, en général, sur la convergence de la série proposée.

NOTE II.

SUR LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES. COMMENT ON LES INTRODUIT DANS LES DONNÉES DU CALCUL.

23. La résolution des équations du deuxième degré conduit quelquefois à extraire des racines carrées de quantités négatives. Ces sortes d'expressions ne représentent pas des nombres, soit positifs, soit négatifs; on les désigne sous le nom de *quantités imaginaires*. Nous n'avons pas pour objet d'examiner ici à quelles circonstances correspondent ces formes dans les questions proposées; nous nous bornerons à dire qu'en substituant ces expressions à l'inconnue, l'équation que l'on avait à résoudre devient identique, pourvu que les racines carrées des quantités négatives soient traitées d'après les règles ordinaires de l'algèbre, et que l'on considère leur carré comme s'obtenant par la suppression du radical.

Si l'on a, par exemple, l'équation

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

on en tire les deux valeurs imaginaires

$$x = a \pm \sqrt{-b^2},$$

et l'on peut vérifier que la substitution de cette valeur dans l'équation la réduit à $0 = 0$.

Il en serait de même si, au lieu de $\sqrt{-b^2}$, on mettait $b\sqrt{-1}$, et c'est ce que l'on fait ordinairement, afin que la seule quantité imaginaire à considérer soit toujours $\sqrt{-1}$. Les valeurs de x se trouvent ainsi mises sous la

forme

$$x = a \pm b\sqrt{-1}.$$

Il semble d'abord que toutes les considérations auxquelles ces sortes d'expressions peuvent donner lieu, soient relatives aux circonstances qui leur donnent naissance dans les questions dont elles présentent la solution; mais on a trouvé de très-grands avantages à les introduire dans les données mêmes de certains calculs, et c'est sous ce point de vue que nous allons les considérer.

Sans attacher aucune idée de quantité à l'expression $\sqrt{-1}$, nous convenons de la traiter de la même manière que si c'était un nombre dont les puissances successives seraient

$$\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\quad +1,\quad \sqrt{-1},\ldots,$$

les quatre premières se reproduisant indéfiniment dans le même ordre.

Rien ne s'oppose à ce que l'on fasse des calculs algébriques dans lesquels $\sqrt{-1}$ soit traité de cette manière; il ne s'agit que de savoir s'il y a quelque intérêt à le faire, et si de pareilles opérations peuvent offrir de nouvelles ressources à l'analyse. Il pourra quelquefois être plus commode de remplacer $\sqrt{-1}$ par une lettre dont les puissances se distinguent toutes les unes des autres, tandis que celles de $\sqrt{-1}$ se reproduisent périodiquement. En désignant $\sqrt{-1}$ par λ, nous entendrons que λ soit traité comme un facteur ordinaire, d'après toutes les règles démontrées dans le cas des quantités réelles; seulement, après tous les calculs effectués, on remplacera les puissances

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ \lambda^4,\ \lambda^5,\ \lambda^6,\ldots$$

par

$$\lambda,\ -1,\ -\lambda,\ +1,\ \lambda,\ -1,\ldots.$$

24. Lorsque nous poserons une équation entre des quantités réelles et imaginaires, comme

$$A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1},$$

nous entendrons toujours que l'on savait d'avance que $A = A'$ et $B = B'$. Ces dernières équations ne seront jamais des conséquences de la première; c'est, au contraire, la première qui en est la conséquence, et nous n'attacherions aucun sens à cette équation si nous ne savions, indépendamment d'elle, que les parties réelles sont égales de part et d'autre, ainsi que les coefficients respectifs de $\sqrt{-1}$. Nous insistons sur ce point, parce que la plupart des auteurs l'entendent de la manière inverse.

25. Ayant bien établi de quelle manière nous traiterons l'expression $\sqrt{-1}$, nous allons montrer, par un premier exemple, l'avantage que l'on peut avoir à l'introduire dans le calcul.

Considérons les deux expressions

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x, \quad \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

et multiplions-les entre elles, dans le sens que nous attachons ici à cette opération; nous trouverons

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + \sqrt{-1}\,(\sin x \cos y + \sin y \cos x),$$

ou

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y).$$

Nous pouvons donc poser

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

puisque nous avons prouvé d'avance que les parties réelles

étaient respectivement égales, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$.

Et l'on conclut de là que pour diviser deux expressions de cette forme l'une par l'autre (en entendant par quotient une expression qui, multipliée par le diviseur suivant les règles convenues, reproduirait le dividende) il suffit de retrancher l'arc qui se trouve au diviseur de celui qui entre dans le dividende.

En multipliant le produit de ces premières expressions par une troisième $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, il suffira encore d'ajouter les arcs $x+y$ et z, ce qui donnera la nouvelle équation

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$$
$$= \cos(x+y+z) + \sqrt{-1}\sin(x+y+z);$$

et il est facile de voir que, quel que soit le nombre des facteurs de cette forme, leur produit effectué donnera toujours pour partie réelle le cosinus de la somme de tous les arcs, et pour coefficient de $\sqrt{-1}$ le sinus de cette même somme. On pourra donc poser une équation semblable à la dernière, en supposant un nombre m quelconque de facteurs, puisque les parties réelles sont démontrées égales, ainsi que les parties imaginaires.

En supposant le cas particulier où $x = y = z = \ldots$, on aurait la formule suivante, qui est due à Moivre :

$$(1) \quad (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx;$$

il est donc prouvé que, si l'on forme la puissance m du binôme $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ d'après les règles ordinaires, la partie réelle sera égale à $\cos mx$, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ à $\sin mx$. Or le développement de la puissance m d'un binôme s'effectue au moyen d'une formule très-simple; on aura donc ainsi le développement général de

$\cos mx$ et $\sin mx$, m étant un nombre entier quelconque. Ces formules sont

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}x\sin^2 x$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 + \ldots,$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \ldots.$$

On peut observer que le développement de

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m$$

ne différerait de celui de

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m$$

que par le signe des termes où se trouvent les puissances impaires de $\sqrt{-1}$, et que, par conséquent,

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx.$$

26. En entendant par racine $n^{ième}$ d'une expression imaginaire une autre expression qui, élevée à la puissance n, suivant le sens convenu, reproduirait la première, on voit que $\cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n}$ est une racine $n^{ième}$ de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, puisque nous avons prouvé que pour élever une semblable expression à la puissance $n^{ième}$, il suffit de multiplier l'arc par n. On a donc

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{x}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{x}{n};$$

et si l'on élève les deux membres à la puissance p, il vient

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x,$$

ce qui montre que l'équation (1) est vraie quand m est un nombre fractionnaire quelconque $\frac{p}{n}$, en entendant seulement par là que $\cos\frac{p}{n}x \pm \sqrt{-1}\sin\frac{p}{n}x$, élevé à la puissance n, donnerait la puissance p de $\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x$, et que, par conséquent, il est une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de cette puissance p.

L'équation (1) est encore vraie si m est égal à un nombre négatif $-n$. En effet,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n} = \frac{1}{(\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx)};$$

or diviser par $\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$, c'est trouver une expression qui, multipliée par ce diviseur d'après les règles convenues, donne pour produit le dividende; ce quotient est donc $\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx$.

Donc

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^{-n} = \cos(-nx + \sqrt{-1}\sin(-nx).$$

La formule (1) est donc vraie, quelque valeur réelle qu'ait m, en observant toutefois que si la puissance m est susceptible de plusieurs valeurs, nous avons seulement prouvé ici que le second membre en est une.

27. Nous allons résoudre maintenant la question inverse, qui consiste à développer $\cos^m x$ et $\sin^m x$ au moyen des cosinus et sinus des arcs multiples de x, m étant un nombre entier.

Pour cela, nous poserons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u,$$
$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = v;$$

d'où

$$2\cos x = u + v,$$

et, par suite,

$$2^m \cos^m x = u^m + mu^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 + \ldots + mu v^{m-1} + v^m$$

Observant maintenant que $uv = 1$, et que $u^k + v^k = 2\cos kx$, on aura

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2.m\cos(m-2)x + 2.\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots$$

Si m est pair, le terme qui se trouve au milieu du développement de $(u+v)^m$ se réduit à $\dfrac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$ et forme le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$. Si m est impair, les deux termes du milieu sont en u et v de la forme

$$u^{\frac{m+1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m+1}{2}},$$

expressions qui se réduisent respectivement à u et v, puisque $uv = 1$. Le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$ est alors

$$2\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\cos x.$$

On développera maintenant $\sin^m x$, en observant que

$$2\sqrt{-1}\sin x = u - v,$$

d'où

$$2^m\left(\sqrt{-1}\right)^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2} v^2 \ldots;$$

ce qui signifie toujours que les parties réelles sont les mêmes de part et d'autre, ainsi que les coefficients de $\sqrt{-1}$, s'il y reste, ce qui n'arrivera que si m est impair.

Supposons d'abord m pair : les termes à égale distance des extrêmes seront de même signe, et, en les réunissant deux à deux, on trouvera

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m x = 2\cos mx - 2m\cos(m-2)x + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\ldots\ldots\frac{m}{2}},$$

le signe + correspondant à $\frac{m}{2}$ pair, et le signe — à $\frac{m}{2}$ impair. Si m est impair, le développement pourra se mettre sous la forme

$$u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \ldots,$$

en remplaçant partout uv par 1. Si donc on observe que $u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\sin kx$, on aura, en ne prenant que les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$2^m(-1)^{\frac{m-2}{2}}\sin^m x = 2\sin mx - 2m\sin(m-2)x + 2\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x - \ldots;$$

le dernier terme sera

$$\pm 2\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sin x,$$

le signe + ayant lieu quand $\frac{m-1}{2}$ sera pair, et le signe — quand il sera impair.

28. Examinons maintenant en quoi consiste l'avantage que l'emploi de $\sqrt{-1}$ a procuré dans la recherche des développements de $\cos^m x$ et $\sin^m x$.

Nous avons remplacé $2\cos x$ par

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x + \cos x - \sqrt{-1}\sin x,$$

qui lui est identique, puisque les deux termes

$$\sqrt{-1}\sin x \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}\sin x,$$

traités comme s'ils représentaient des nombres, se détruisent. Et même si, au lieu de $\sqrt{-1}$, on met une quantité λ indéterminée, on pourra remplacer $2\cos x$ par

$$(\cos x + \lambda\sin x) + (\cos x - \lambda\sin x);$$

et quelque calcul que l'on effectue sur cette expression, le résultat sera nécessairement indépendant de λ, et les puissances d'un même degré quelconque de cette lettre auront zéro pour coefficient. Or prendre seulement les termes réels du résultat, c'est négliger les puissances impaires de λ et ne conserver que les puissances paires, ce qui est permis, puisque les coefficients de chaque puissance de λ sont nuls. Mais quand on remplacera λ^2 par -1, il pourra y avoir des réductions entre les termes correspondants à des puissances différentes de λ, et notamment avec ceux qui ne renfermaient pas λ, et qui sont précisément ceux que l'on trouverait en ne transformant pas d'abord $2\cos x$. Il peut donc résulter de là de nouvelles combinaisons qui, sans altérer la valeur du résultat, lui donnent une forme plus commode. Cela revient à ajouter au résultat des quantités qui se détruisent: mais à chaque instant, dans l'algèbre, on voit de pareils artifices faciliter les transformations; et ce qui fait que, dans le cas actuel, on en retire réellement un très-grand

avantage, c'est que les deux binômes dont la somme remplace $2\cos x$ sont tels, que les puissances de chacun d'eux s'effectuent immédiatement par la multiplication de l'arc, et que le produit des puissances semblables de l'un et l'autre est l'unité. Il résulte de là que la puissance $m^{ième}$ de $\cos x$ se trouve immédiatement exprimée au moyen des cosinus des arcs multiples de x; et il en est de même pour $\sin^m x$.

Usage des lignes trigonométriques pour l'extraction des racines des quantités réelles ou imaginaires.

29. Les racines de degré m d'un nombre réel positif ou négatif $\pm A$, sont les racines de l'équation

$$y^m \mp A = 0;$$

ces racines peuvent se ramener à celles de l'unité, en posant $y = ax$, a désignant la racine $n^{ième}$ arithmétique du nombre A; l'équation proposée se trouve ainsi ramenée à la suivante :

$$x^m \mp 1 = 0,$$

dont nous allons déterminer les m racines, qui sont toutes inégales, puisqu'il n'y a pas de commun diviseur entre le premier membre et sa dérivée. Soit d'abord

$$x^m - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad x^m = 1.$$

Nous pouvons représenter 1 par une expression de la forme $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, dont nous savons qu'il est facile d'extraire la racine. Il suffit de poser $z = 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; et l'on aura identiquement

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1}\sin 2n\pi.$$

Donc l'expression

$$(1) \qquad \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

donne des racines $m^{\text{ièmes}}$ de 1, et, par conséquent, des valeurs de x pour toute valeur entière de n.

Or on reconnaît immédiatement que l'expression (1) ne change pas quand on augmente ou qu'on diminue n de m ou d'un multiple entier quelconque de m. Il suffit donc, dans la série indéfinie des nombres entiers positifs ou négatifs, d'en prendre m consécutifs quelconques; ils donneront toutes les valeurs de l'expression (1). De plus, il est facile de voir qu'elles seront toutes différentes, parce que deux de ces arcs ne peuvent avoir le même sinus et le même cosinus; donc toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

seront données par la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m},$$

dans laquelle on donnera à n les valeurs 0, 1, 2, etc., jusqu'à ce que l'on ait m valeurs pour le second membre; car c'est comme si l'on donnait à n, m valeurs consécutives, les unes positives, les autres négatives.

Si m est pair, on posera $m = 2k$, et il viendra

$$x = \cos\frac{n\pi}{k} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{k}.$$

Il faudra alors donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$. Les deux extrêmes donnent $x = 1$, $x = -1$, et toutes les autres valeurs de x sont imaginaires, conjuguées et réciproques deux à deux.

Si l'on a

$$m = 2k + 1,$$

il faudra donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k$.

La première donne $x = 1$; les autres sont toutes imaginaires, conjuguées et réciproques.

30. Soit maintenant

$$x^m + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^m = -1, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{-1}.$$

On peut encore donner à -1 la forme $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$, en posant $z = (2n+1)\pi$. On aura donc des valeurs de x par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m};$$

il suffira encore de prendre m valeurs consécutives de n, parce qu'elles correspondront toutes à des sinus ou cosinus différents, et toutes les autres valeurs de n fourniraient les mêmes valeurs pour x. Toutes les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

sont donc données par la formule

$$x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

en donnant à n des valeurs positives depuis zéro jusqu'à ce qu'il en résulte m valeurs pour le second membre. Si $m = 2k$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k-1$, les valeurs de x seront toutes imaginaires, conjuguées et réciproques. Si $m = 2k+1$, les valeurs de n seront $0, 1, 2, \ldots, k$, la dernière donnera $x = -1$; toutes les autres valeurs de x seront conjuguées et réciproques.

Les racines de ± 1 étant connues, on aura celles de $\pm A$ en les multipliant par la racine arithmétique de A.

Les facteurs réels du premier et du second degré, dans lesquels peuvent se décomposer les binômes $x^m - 1$ et $x^m + 1$, peuvent être représentés par une construction fort simple, qui dépend de la division du cercle en parties égales, et qui a été donnée par le géomètre anglais Cotes.

31. Cherchons maintenant à extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'une expression de la forme

$$a \pm b\sqrt{-1}.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

en déterminant ρ et z par les deux équations

$$\rho\cos z = a, \quad \rho\sin z = b;$$

d'où

$$\rho = \pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos z = \frac{a}{\rho}, \quad \sin z = \frac{b}{\rho}.$$

Pour plus de commodité, nous ne prendrons que la valeur positive de ρ. Désignons par φ le plus petit arc positif ayant pour cosinus $\frac{a}{\rho}$ et pour sinus $\frac{b}{\rho}$; on pourra, sans que ces lignes changent, l'augmenter d'un nombre quelconque de circonférences, et l'on aura

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\varphi + 2n\pi)].$$

On aura des racines $m^{\text{ièmes}}$ de cette expression en prenant la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ, et la multipliant par la racine du second facteur, que l'on obtiendra par la division de l'arc; on a ainsi

$$\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right).$$

Il suffit évidemment de donner à n, m valeurs consécutives, positives ou négatives; toutes les autres donneraient les mêmes résultats. De plus, ces m valeurs de n donnent des valeurs différentes pour les sinus ou cosinus de $\frac{\varphi + 2n\pi}{m}$; donc, en donnant à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots,$

$m-1$, toutes les valeurs de la racine cherchée seront données par la formule

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi + 2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi + 2n\pi}{m}\right),$$

les signes supérieurs de $\sqrt{-1}$ se correspondant, ainsi que les inférieurs.

32. La transformation de

$$a \pm b\sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)$$

ramène toutes les opérations sur les quantités imaginaires aux opérations sur des expressions de la forme

$$\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z,$$

et nous avons vu que celles-ci se ramenaient toutes aux opérations immédiatement inférieures sur les arcs, propriétés tout à fait analogues à celles des exponentielles.

Cette analogie sera encore augmentée par les considérations suivantes.

Représentation des sinus et cosinus par des exponentielles imaginaires.

33. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$, et qu'on représente la série résultante par $e^{x\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1) \quad e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Si l'on convient de même de désigner par $e^{-x\sqrt{-1}}$ le résultat de la substitution de $-x\sqrt{-1}$ à x dans le développement de e^x, on aura

$$(2) \quad e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots$$

Ces équations peuvent être écrites comme il suit :

$$(3)\qquad \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

et dans toutes ces formules il ne faut pas oublier que $e^{x\sqrt{-1}}$ et $e^{-x\sqrt{-1}}$ n'ont aucun sens comme exponentielles : elles ne représentent autre chose que les séries qu'on obtient en substituant $+x\sqrt{-1}$ et $-x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x, et traitant $\sqrt{-1}$ de la manière convenue.

34. Il est facile de démontrer que ces exponentielles imaginaires doivent être traitées d'après les mêmes règles que si les exposants étaient réels.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de multiplier $e^{x\sqrt{-1}}$ par $e^{y\sqrt{-1}}$, en entendant toujours par là les séries qui représentent ces expressions, et qui peuvent être remplacées par $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$ et $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, dont le produit est $\cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y)$. Cette dernière expression est représentée, dans le même sens, par $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$; donc on peut poser

$$e^{x\sqrt{-1}} . e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

La règle des exposants réels s'observe donc dans la multiplication des exponentielles imaginaires, et, par suite, dans leur division, dans leur élévation à des puissances, et dans l'extraction de leurs racines.

On pourrait encore déduire cette proposition de ce que e^{x+y} étant égal à $e^x e^y$ pour toutes les valeurs réelles de x et y, on a identiquement

$$1+\frac{(x+y)}{1}+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots=\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots\right)\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\ldots\right).$$

L'identité ne sera pas troublée en changeant dans les deux membres x en $x\sqrt{-1}$, ou y en $y\sqrt{-1}$; et l'on trouvera toujours les mêmes termes réels ou imaginaires avec les mêmes signes : d'où l'on conclut

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}}=e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}},$$

ou encore, en supposant qu'on change seulement y en $y\sqrt{-1}$,

$$e^{(x+y\sqrt{-1})}=e^x e^{y\sqrt{-1}}=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y).$$

35. On est convenu de donner le nom de logarithmes aux exposants imaginaires, comme aux exposants réels. Ainsi $x+y\sqrt{-1}$ est le logarithme de $e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$; et pour avoir le logarithme d'une expression de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$, on posera d'abord

$$a\pm b\sqrt{-1}=\rho(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)=e^{l\rho\pm x\sqrt{-1}}$$
$$=e^{l\rho\pm(\varphi\pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

φ étant la plus petite valeur positive de x, et l'on aura

$$l(a\pm b\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}l(a^2+b^2)\pm\sqrt{-1}(\varphi\pm 2n\pi).$$

Si $b=0$, on a pour toutes les valeurs du logarithme de a,

$$la\pm\sqrt{-1}(\varphi\pm 2n\pi).$$

L'arc φ est égal à 0 si a est positif, et égal à π si a est négatif. On a donc, en entendant par la le logarithme

arithmétique du nombre a,

$$l(+a) = la \pm 2n\pi\sqrt{-1},$$
$$l(-a) = la \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Cette dernière expression ne donne aucune valeur réelle; la première en donne une seule.

En faisant $a = 1$, on trouve

$$l1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}, \quad l(-1) = \pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

36. On peut exprimer, au moyen des formules précédentes, les racines des équations de la forme

$$x^{2m} + px^m + q = 0.$$

En effet, on en tire d'abord

$$x^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ou $= 0$, les valeurs de x seront les racines de quantités réelles, et nous avons vu comment on pouvait les exprimer au moyen des lignes trigonométriques.

Si l'on a $\frac{p^2}{4} - q < 0$, les valeurs de x^m seront de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, et l'on en extraira les racines $m^{\text{ièmes}}$, comme nous l'avons indiqué en dernier lieu.

Si l'on forme, d'après les valeurs de ces racines, les facteurs réels de $x^{2m} + px^m + q$, on reconnaît immédiatement une construction simple qui les représente géométriquement, et qui repose sur la division du cercle en parties égales. Nous nous dispenserons d'entrer dans ces détails.

FIN DU TOME PREMIER.

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE R.F.

613580

Digitized by Google